

THEORIE DES PSEUDO-MESURES

Une présentation constructive de l'intégrale de Lebesgue

TABLE DES MATIERES

PREMIÈRE PARTIE : Intégration sur $[a, b]$

CHAPITRE I : PSEUDO-MESURES , MESURES , FONCTIONNELLES SOMMABLES SUR $[a, b]$

- § 0. Notations 1
- § 1. N-dual d'un espace normé ou semi-normé 2
- § 2. Pseudo-mesures 5
- § 3. Fonctionnelles sommables 8
- § 4. Sommes de Lebesgue 10
- § 5. Espaces ordonnés . Ordre dans \mathcal{PM} 11
- § 6. Théorème de convergence monotone 13
- § 7. Valeur absolue d'une pseudo-mesure 15
- § 8. Mesures et mesures diffuses 19
- § 9. Convergence fine dans \mathcal{PM} 21
- § 10. Suprémum et Infimum généralisés dans \mathcal{PM} 24

CHAPITRE II : ESPACES DE RIESZ

- § 1. Définitions et propriétés 27
- § 2. Treillis 31
- § 3. Sous-espaces d'un espace de Riesz 31
- § 4. Domaines de Riesz sur un espace de Riesz 32
- § 5. Espaces semi-normés de Riesz 33
- § 6. N-dual d'un espace semi-normé de Riesz 34
- § 7. Quotient d'un espace de (Riesz-)Banach 35
- § 8. Morphismes et isométries de Riesz 38

CHAPITRE III : FONCTIONS POSITIVES SEMI-CONTINUES SUPÉRIEUREMENT SUR $[a, b]$ 39

CHAPITRE IV : THÉORÈME DE LEBESGUE SUR $[a, b]$

- § 1. Théorème de Lebesgue dans \mathcal{R} 43
- § 2. Fonctions pseudo-réglées . Théorème de Lebesgue dans \mathcal{PR} 45
- § 3. Fonctions universelles . Théorème de Lebesgue dans \mathcal{W} 50
- | |
|---------------|
| Récapitulatif |
|---------------|

 54

CHAPITRE V : ALGÈBRES DE RIESZ

- § 1. Algèbres de Riesz 55
- § 2. Modules de Riesz 58
- § 3. Algèbromodules de Riesz 58

CH. VI : FONCTIONNELLES HILBERTIENNES , BORNÉES ET CARACTÉRISTIQUES SUR $[a, b]$

- § 1. Fonctionnelles hilbertiennes 61
- § 2. Racine carrée d'une fonctionnelle sommable positive 64
- § 3. Fonctionnelles bornées 67
- § 4. Fonctions *versus* fonctionnelles 69
- § 5. Fonctionnelles caractéristiques 71
- § 6. Pseudo-mesures booléennes 74
- § 7. Support d'une pseudo-mesure 76

CHAPITRE VII : THÉORÈME DE RADON-NIKODYM. COMPLÉMENTS

- § 1. Théorème de Radon-Nikodym 83
- § 2. Théorèmes divers 85
- § 3. Mesures atomiques 89
- § 4. Pseudo-mesures atomiques 91
- § 5. Mesures de Radon sur $[a, b]$ 92

Récapitulatif

 94

CHAPITRE VIII : PRIMITIVES , DIFFÉRENTIELLES , DÉRIVÉES

- § 1. Fonctions continues à variation bornée 95
- § 2. Sommes de Riemann-Stieltjes 97
- § 3. Formules classiques 98

CHAPITRE IX : CHANGEMENT DE VARIABLE

§ 1. Fonctions réglées 101

§ 2. Fonctionnelles sommables 102

CHAPITRE X : INDICATEURS ET MODES DE CONVERGENCE DANS \mathcal{L}^1

§ 1. Indicateurs 107

§ 2. Convergence en mesure 110

§ 3. Convergence presque partout 114

§ 4. Dérivée de la primitive d'une fonctionnelle sommable 116

§ 5. Convergence plate 119

§ 6. Convergence exacte 119

Récapitulatif 121

CHAPITRE XI : FONCTIONNELLES SUR $[a, b]$

§ 1. Suites Cauchy-exactes dans \mathcal{B} 123

§ 2. Supports et indicateurs 125

§ 3. Fonctionnelles 128

Récapitulatif 129

§ 4. Modes de convergence dans \mathcal{FO} 129

A. Convergence en mesure 130

B. Convergence presque partout 134

C. Convergence plate 138

D. Convergence exacte 139

§ 5. Equations linéaires dans \mathcal{FO} 140

ANNEXE : PARTIES TOTALEMENT BORNÉES DE \mathcal{L}^1

DEUXIÈME PARTIE : Intégration sur \mathbb{R}

CHAPITRE XII : PSEUDO-MESURES, MESURES, FONCTIONNELLES SUR \mathbb{R}

§ 0. Notations 143

§ 1. Pseudo-mesures et mesures 144

- § 2. Pseudo-mesures paires et impaires 147
- § 3. Fonctionnelles localement sommables 148
- § 4. Fonctionnelles localement hilbertiennes 149
- § 5. Fonctionnelles localement bornées 150
- § 6. Fonctionnelles caractéristiques 152
- Récapitulatif
 153

CHAPITRE XIII : THÉORÈMES CLASSIQUES

- A. Théorème de Lebesgue 153
- B. Théorème de continuité 153
- C. Théorème de Dieudonné 154
- D. Théorème d'holomorphic 155

CHAPITRE XIV : CONVERGENCE FAIBLE ET CONVERGENCE FIDÈLE 157

TROISIÈME PARTIE : Intégration sur un rectangle compact de \mathbb{R}^2

CHAPITRE XV : FONCTIONS ET PSEUDO-MESURES SUR UN RECTANGLE COMPACT

- § 1. Espaces fondamentaux 159
- § 2. Produit tensoriel de fonctions 161
- § 3. Pseudo-mesures marginales 162
- § 4. Produit tensoriel de pseudo-mesures 164
- § 5. Points de Lebesgue 166
- § 6. Théorème de Fubini 168
- § 7. Généralisation à \mathbb{R}^2 170
- § 8. Généralisation à \mathbb{R}^n 173
- Récapitulatif
 173

CHAPITRE XVI : APPLICATIONS

- § 1. Dérivation des primitives 175
- § 2. Convolution sur \mathbb{R} 177
- § 3. Convolution sur \mathbb{R}^+ 178
- § 4. Transformée de Laplace 179

- § 5. Théorème de Titchmarsh 180
- § 6. Transformée réelle de Fourier 182
- § 7. Transformée complexe de Fourier 187
- § 8. Inégalité de Jensen 189

QUATRIÈME PARTIE : Espaces associés à une mesure normée positive sur \mathbb{R}^n

CHAPITRE XVII : MESURES NORMÉES DE BASE $\tilde{\mu}$ ET $\tilde{\mu}$ -FONCTIONNELLES SUR \mathbb{R}^n

- § 1. Mesures normées de base $\tilde{\mu}$ 191
- § 2. $\tilde{\mu}$ -fonctionnelles sommables 192
- § 3. $\tilde{\mu}$ -fonctionnelles hilbertiennes 195
- § 4. $\tilde{\mu}$ -fonctionnelles bornées 196
- § 5. $\tilde{\mu}$ -fonctionnelles caractéristiques 198
- § 6. $\tilde{\mu}$ -support 198
- § 7. Théorème de Radon-Nikodym 199
- § 8. Indicateurs 199
- § 9. $\tilde{\mu}$ -fonctionnelles 201
- Récapitulatif 201
- § 10. Composée d'une $\tilde{\mu}$ -fonctionnelle et d'une fonction réglée 201
- § 11. Composée d'une $\tilde{\mu}$ -fonctionnelle sommable et d'une fonction
lipschitzienne 203

CHAPITRE XVIII : IMAGE D'UNE MESURE NORMÉE POSITIVE

- § 1. Image d'une mesure normée positive $\tilde{\mu}$ par une $\tilde{\mu}$ -fonctionnelle 205
- § 2. Convergences en loi faible et en loi forte 206
- Récapitulatif 209
- § 3. Composée d'une $\tilde{\mu}$ -fonctionnelle \mathbf{F} et d'une $\tilde{\mu}_{\mathbf{F}}$ -fonctionnelle 209
- § 4. Généralisation aux $\tilde{\mu}$ -polyfonctionnelles 211

CHAPITRE XIX : CONDITIONNEMENT D'UNE $\tilde{\mu}$ -FONCTIONNELLE SOMMABLE 213

CHAPITRE XX : MESURES ET FONCTIONNELLES SUR \mathbb{Z}_p

§ 1. Définitions et notations 217

§ 2. Intégrale de Haar des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p 218

§ 3. Espaces fondamentaux 221

Récapitulatif 223

§ 4. Moyenne d'une mesure sur une boule 223

CHAPITRE XXI : SÉRIES DE FOURIER SUR \mathbb{Z}_p

§ 1. Caractères de \mathbb{Z}_p 225

§ 2. Séries de Fourier sur \mathbb{Z}_p 226

§ 3. Exemples de séries de Fourier sur \mathbb{Z}_p 229

CHAPITRE XXII : CONVOLUTION SUR \mathbb{Z}_p 239

SIXIÈME PARTIE : Intégration sur les espaces de suites

CHAPITRE XXIII : ESPACES DE SUITES

§ 1. Les espaces Ω 243

§ 2. L'espace $\tilde{\mathbb{R}}$ 246

§ 3. Compacts élémentaires de $\tilde{\mathbb{R}}$ 250

§ 4. Espaces associés à une mesure normée positive sur $\tilde{\mathbb{R}}$ 256

CHAPITRE XXIV : PROBABILITÉS

§ 1. Vocabulaire des probabilités 259

§ 2. Applications 260

Bibliographie 267

Index des notions 269

Index des notations 271