SIXIEME PARTIE

Intégration sur les espaces de suites

CHAPITRE XXIII

ESPACES DE SUITES

Les espaces de suites constituent le cadre naturel dans lequel traiter les problèmes relatifs aux processus stochastiques, en particulier ceux concernant les suites de variables aléatoires indépendantes ou les martingales. Nous commençons par le cas très particulier du produit cartésien d'une suite d'ensembles finis, qui est un espace topologique compact, et qui permet d'introduire de manière simple et significative les concepts de base.

Nous réexaminons ensuite ces concepts pour l'espace vectoriel des suites réelles, muni d'une topologie convenable, qui constitue l'espace fondamental de la théorie des processus. Cet espace n'étant pas localement compact, contrairement aux espaces $\mathbb{R}^n$, nous serons amenés à travailler avec une compacité pseudo-locale, utilisant une famille de compacts suffisamment représentatifs : les *compacts élémentaires*.

§ 1. Les espaces Ω

Soit H_i une suite d'ensembles finis non vides ; on note Ω l'ensemble des suites X telles que $\forall\, i \in \mathbb{N}\;\; X(i) \in \mathsf{H}_i$. On munit Ω de la topologie de la convergence simple : une suite d'éléments $X_n \in \Omega$ converge simplement vers $X \in \Omega$ ssi $\forall\, j \in \mathbb{N}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, i \leq j \;\; \forall\, n \geq N \;\; X_n(i) = X(i)$; on écrit $X_n \overset{\mathsf{S}}{\to} X$.
L'espace Ω est homéomorphe au produit cartésien infini $\underset{i \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}} \mathsf{H}_i$.

Remarque : $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ est un cas particulier d'espace Ω : en effet $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ est homéomorphe à Ω avec $\forall\, i \in \mathbb{N} \;\; \mathsf{H}_i = \{0\,,1\,,\ldots\,,p-1\}$.

1.1. Théorème : Ω est un espace topologique $\boxed{\text{compact}}$.

Dém : C'est un produit (dénombrable) d'espaces compacts.

1.2. Définition : Les boules de Ω de centre $X \in \Omega$ sont les parties

$$B_j(X) = \{ Y \in \Omega \;\|\; \forall\, i \leq j \;\; Y(i) = X(i) \} \quad \text{avec } j \in \mathbb{N}.$$

1.3.* Théorème : Les boules sont à la fois ouvertes et fermées dans Ω. Une partie A de Ω est ouverte ssi $\forall X \in A$ il existe une boule B avec $X \in B \subset A$.

Notation : On note $\mathcal{F}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions bornées $\Omega \to \mathbb{R}$, que l'on munit de la norme uniforme $\|f\| = \sup_{X \in \Omega} |f(X)|$.

1.4.* Théorème : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue en $X \in \Omega$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\forall Y \in \Omega$ $\boxed{\big[\, \forall i \leq j \;\; Y(i) = X(i) \,\big] \;\Rightarrow\; |f(Y) - f(X)| \leq \varepsilon}$.

On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions continues $\Omega \to \mathbb{R}$. On a clairement $\mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$.

On pose $\forall j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\Omega_j = \bigtimes_{i \leq j} \mathsf{H}_i}$ et on note $\mathcal{F}(\Omega_j)$ l'algèbre des fonctions $\Omega_j \to \mathbb{R}$.

1.5. Définition : Soit $j \in \mathbb{N}$; pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ on identifie f à la fonction de $\mathcal{F}(\Omega)$ définie par

$$\boxed{f : \Omega \to \mathbb{R} : X \mapsto f\big[X(0), X(1), \ldots, X(j)\big]}.$$

1.6.* Théorème : $\mathcal{F}(\Omega_j)$ est une algèbre de Riesz (finidimensionnelle) et $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\mathcal{F}(\Omega_j) \subset \mathcal{F}(\Omega_{j+1}) \subset \mathcal{C}(\Omega)}.$$

Notation : On pose $\boxed{\mathcal{E}(\Omega) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(\Omega_j)} \subset \mathcal{C}(\Omega)$.

Les éléments de l'algèbre de Riesz $\mathcal{E}(\Omega)$ s'appellent les fonctions étagées sur Ω ; ce sont des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de boules de Ω.

1.7.* Théorème : $\mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$ pour la norme uniforme.

1.8. Définition fondamentale :

Une mesure sur Ω est un élément du N-dual de l'espace normé $\big(\mathcal{E}(\Omega), \|\;\|\big)$.

Ou encore : Une mesure sur Ω est une forme linéaire $\tilde{\mu} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété : $\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{E}(\Omega) \;\; |\tilde{\mu}(f)| \leq M \|f\|}$.

On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace vectoriel des mesures sur Ω.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{M}(\Omega) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}(\Omega), \|\;\|\big)}$.

On munit $\mathcal{M}(\Omega)$ de la **norme duale** $\|\;\|_\star$.

Notation intégrale : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega) \quad \forall\, f \in \mathcal{E}(\Omega)$ on note

$$\boxed{\int_\Omega f(X)\, \tilde{\mu}(X) = \int_\Omega f\, \tilde{\mu} \;=\; \tilde{\mu}(f)}\,.$$

1.9. Définition : Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)$; $\forall\, j \in \mathbb{N}$ on note $\tilde{\mu}_{(j)}$ la restriction de $\tilde{\mu}$ à $\mathcal{F}(\Omega_j)$.
$\tilde{\mu}_{(j)}$ peut être considéré de manière naturelle comme une mesure sur Ω_j.

Réciproquement soit une suite de mesures $\tilde{\mu}_j$ sur Ω_j telle que $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{\mu}_j\|_\star < +\infty$ et $\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, f \in \mathcal{E}_j(\Omega) \quad \tilde{\mu}_{j+1}(f) = \tilde{\mu}_j(f)$; alors la suite $\tilde{\mu}_j$ définit de manière naturelle une mesure sur Ω, ce que l'on peut énoncer dans le théorème suivant :

1.10.* Théorème : La donnée d'une mesure $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)$ est équivalente à la donnée d'une suite de mesures $\tilde{\mu}_j$ sur Ω_j telle que

$$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{\mu}_j\|_\star < +\infty} \quad \underline{\text{et}} \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, f \in \mathcal{F}(\Omega_j) \quad \boxed{\tilde{\mu}_{j+1}(f) = \tilde{\mu}_j(f)}\,.$$

La suite $\|\tilde{\mu}_j\|_\star$ est alors croissante et on a $\boxed{\|\tilde{\mu}\|_\star = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{\mu}_j\|_\star}$.

Remarque : Comme Ω_j est un ensemble fini, une mesure $\tilde{\mu}_j$ sur Ω_j est simplement une "fonction de poids" $\tilde{\mu}_j : \Omega_j \to \mathbb{R}$.

Les conditions du théorème précédent signifient donc explicitement :

$$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\omega \in \Omega_j} |\tilde{\mu}_j(\omega)| < +\infty} \quad \underline{\text{et}} \quad \boxed{\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, \omega \in \Omega_j \quad \boxed{\sum_{x \in \mathsf{H}_{j+1}} \tilde{\mu}_{j+1}(\omega, x) \;=\; \tilde{\mu}_j(\omega)}}$$

1.11.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\Omega) \qquad \boxed{\tilde{\mu} \leq \tilde{\nu} \;\Leftrightarrow\; \left[\, \forall\, j \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}_{(j)} \leq \tilde{\nu}_{(j)} \,\right]}$.

1.12.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega) \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad \boxed{|\tilde{\mu}|_{(j)} = |\tilde{\mu}_{(j)}|}$.

1.13.* Théorème : $\mathcal{M}(\Omega)$ est un espace de Riesz-Banach.

1.14. Définition : $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)^+$ est une (mesure de) probabilité sur Ω ssi $\boxed{\|\tilde{\mu}\|_\star = 1}$.
On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω.

1.15. Définition :

$\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)^+$ est un processus stochastique sur Ω ssi $\boxed{\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}_{(j)} \in \mathcal{P}(\Omega_j)}$.

On note $\mathcal{PS}(\Omega) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des processus stochastiques sur Ω.

Comme sur $[a,b]$ on définira les algèbres suivantes de fonctions sur Ω :

1.16. <u>Définition</u> : Une fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ est <u>de Baire</u> ssi elle est limite simple bornée d'une suite de fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$.

On note $\mathcal{BA}(\Omega) = \{\text{fonctions de Baire}\}$.

1.17. <u>Définition</u> : Une fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ est <u>universelle</u> ssi

$$\boxed{\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega)^+ \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \text{ il existe } \ g, h \in \mathcal{BA}(\Omega) \ \text{ tels que } \ g \leq f \leq h \ \text{ et } \ \tilde{\mu}(h-g) \leq \varepsilon}\,.$$

On note $\mathcal{W}(\Omega) = \{\text{fonctions universelles}\}$.

1.18.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{E}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{BA}(\Omega) \subset \mathcal{W}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)}$.

1.19.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{BA}(\Omega)$, $\mathcal{W}(\Omega)$, $\mathcal{F}(\Omega)$ sont des algèbres de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

1.20.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{M}(\Omega)$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\Omega)$.

***Ces espaces vérifient les mêmes propriétés et théorèmes que sur* $[\mathbf{a,b}]$.**

§ 2. <u>L'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$</u>

2.1. <u>Définition</u> : $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est l'algèbre des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (c-à-d des suites réelles). On munit cet espace de la topologie de la convergence simple : une suite d'éléments $X_n \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ converge simplement vers $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $\forall i \in \mathbb{N} \ \ X_n(i) \to X(i)$; on écrit $X_n \overset{\mathsf{S}}{\to} X$. L'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au produit cartésien infini $\underset{i \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}} \mathbb{R}$.

2.2.* <u>Théorème</u> : $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est un espace métrisable et même pseudo-normable pour la pseudo-norme $\| \ \|_{\mathsf{S}}$ définie par $\boxed{\|X\|_{\mathsf{S}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \wedge |X(i)| = \sum_{i=0}^{\infty} \min\left\{\frac{1}{2^i}, |X(i)|\right\}}$;

de plus $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est complet pour cette pseudo-norme.

2.3.* <u>Corollaire</u> : $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est un pseudo-espace de Riesz-Banach.

On note $\mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'algèbre des fonctions $\overset{\infty}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ <u>bornées sur tout compact</u> de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

2.4. <u>Théorème</u> : $f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est continue en $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que $\forall Y \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\big[\,\forall\, i \le j \quad |Y(i) - X(i)| \le \eta\,\big] \;\Rightarrow\; |f(Y) - f(X)| \le \varepsilon} \quad (*)\,.$$

<u>Dém</u> : f est continue en X ssi $\forall\,\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, Y \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\|Y - X\|_{\mathsf{S}} \le \eta \;\Rightarrow\; |f(Y) - f(X)| \le \varepsilon} \quad (**)\,.$$

Montrons l'équivalence des conditions (*) et (**) ; il suffit de le montrer pour $X = 0$.

a) $(*) \Rightarrow (**)$: Soient $j \in \mathbb{N}$ et $\eta < 1$ vérifiant (*) ; supposons $\|Y\|_{\mathsf{S}} \le \dfrac{\eta}{2^j}$;
alors $\forall\, i \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{2^i} \wedge |Y(i)| \le \dfrac{\eta}{2^j}$; donc $\forall\, i \le j$ $|Y(i)| \le \dfrac{\eta}{2^j} \le \eta$; donc
$|f(Y) - f(0)| \le \varepsilon$.

b) $(**) \Rightarrow (*)$: Soit $\eta < 2$ vérifiant (**) ; soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^j} \le \dfrac{\eta}{2}$;
supposons $\forall\, i \le j$ $|Y(i)| \le \dfrac{\eta}{2^{j+1}}$; alors on a

$$\|Y\|_{\mathsf{S}} = \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{2^i} \wedge |Y(i)| + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \wedge |Y(i)| \le \sum_{i=0}^{j} \frac{\eta}{2^{j+1}} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$\le \frac{j+1}{2^{j+1}}\,\eta + \frac{1}{2^j} \le \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \text{ ; donc } |f(Y) - f(0)| \le \varepsilon\,.$$

<u>*Notation*</u> : On note $\mathcal{C}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ l'algèbre des fonctions continues $\overset{\infty}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

2.5. <u>Définition</u> : Les <u>pavés</u> (ouverts, fermés) de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ sont les ensembles de la forme $\mathsf{P} \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ où P est un pavé (ouvert, fermé) de $\mathbb{R}^{j+1}$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$.

2.6.* <u>Théorème</u> : Une partie A de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est ouverte ssi $\forall X \in \mathsf{A}$ il existe un pavé ouvert $\mathsf{B} \subset \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ tel que $X \in \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$.

2.7. <u>Théorème</u> : Soit A un <u>fermé</u> de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$; on note $\forall\, j \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{A}_j = \Big\{\big[\,X(0)\,,\, X(1)\,,\, \ldots\,,\, X(j)\big] \in \mathbb{R}^{j+1} \,\big\|\, X \in \mathsf{A}\Big\}\;;$$

soit $\overline{\mathsf{A}}_j$ la fermeture de A_j dans $\mathbb{R}^{j+1}$; alors la suite $\overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}} \subset \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est décroissante

et on a $\boxed{\mathsf{A} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}}$.

<u>Dém</u> : Posons $\mathsf{A}^* = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$; soit $X \in \mathsf{A}$; on a clairement $\forall\, j \in \mathbb{N}$
$X \in \mathsf{A}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$, donc $X \in \mathsf{A}^*$; on en déduit $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}^*$.

Montrons maintenant $\mathsf{A}^* \subset \mathsf{A}$, c-à-d $\big[X \notin \mathsf{A} \Rightarrow X \notin \mathsf{A}^*\big]$; soit $X \notin \mathsf{A}$; comme A est fermé dans $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$, il existe un pavé ouvert B tel que $X \in \mathsf{B}$ et $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$; il existe donc

$j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{B} = \mathsf{P} \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ où P est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^{j+1}$; supposons $X \in \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$; alors il existe une suite $X_n \in \mathsf{A}$ telle que $\forall\, 1 \leq i \leq j \quad X_n(i) \to X(i)$; donc pour n suffisamment grand $\big[X_n(0)\,,\, X_n(1)\,,\, \dots\,,\, X_n(j)\big] \in \mathsf{P}$, c-à-d $X_n \in \mathsf{B}$; ce résultat est en contradiction avec $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$; on en déduit $X \notin \overline{\mathsf{A}}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$, donc $X \notin \mathsf{A}^*$.

2.8. <u>Définition</u> : Un fermé A de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est <u>régulier</u> ssi $\forall\, j \in \mathbb{N} \;\; \mathsf{A}_j$ est fermé.

2.9. <u>Théorème</u> : Les compacts de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ sont réguliers.

<u>Dém</u> : Soit A un compact de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$; il faut montrer que A_j est fermé ; soit une suite de Cauchy $x_n \in \mathsf{A}_j \subset \mathbb{R}^{j+1}$, de limite $x \in \mathbb{R}^{j+1}$; il existe donc une suite $X_n \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; (x_n\,,\, X_n) \in \mathsf{A}$; alors on peut trouver une sous-suite $(x_{n'}\,,\, X_{n'})$ convergente dans A, et dont la limite est nécessairement de la forme $(x\,,\, X) \in \mathsf{A}$, avec $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$; donc $x \in \mathsf{A}_j$.

2.10. <u>Définition</u> : Une partie de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est <u>primitive</u> ssi elle est de la forme $\mathsf{A} \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ où A est une partie de $\mathbb{R}^{j+1}$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$.

2.11.* <u>Théorème</u> : Tout fermé de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est l'intersection d'une suite de fermés primitifs et tout ouvert de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est la réunion d'une suite d'ouverts primitifs.

2.12. <u>Définition</u> : Soit $j \in \mathbb{N}$; pour toute fonction $f \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^{j+1})$ on <u>identifie</u> f à la fonction de $\mathcal{F}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ définie par

$$\boxed{f \;:\; \overset{\infty}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \;:\; X \mapsto f\big[X(0)\,,\, X(1)\,,\, \dots\,,\, X(j)\big]}\,.$$

On a donc $\forall\, j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathcal{W}(\mathbb{R}^{j+1}) \subset \mathcal{W}(\mathbb{R}^{j+2}) \subset \mathcal{F}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)}$ et $\boxed{\mathcal{C}(\mathbb{R}^{j+1}) \subset \mathcal{C}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)}$.

2.13. <u>Définition</u> : On pose $\boxed{\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big) = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})} \subset \mathcal{F}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$.

Rappelons que $\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})$ est l'espace des fonctions étagés à support borné de $\mathbb{R}^{j+1}$, et remarquons que $\forall\, j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1}) \subset \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+2})}$.

Les éléments de $\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ s'appellent les <u>fonctions étagées</u> sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$. Elles sont <u>bornées</u> mais <u>ne sont pas</u> nulles en dehors d'un compact de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ (sauf la fonction nulle).

On munit l'algèbre de Riesz $\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ de la norme uniforme $\|f\| = \sup\limits_{X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}} |f(X)|$.

2.14. Définition fondamentale :

$$\boxed{\text{Une pseudo-mesure normée sur } \overset{\infty}{\mathbb{R}} \text{ est un élément du N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}), \|\ \|\big).}$$

Ou encore :

Une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ **est une forme linéaire** $\tilde{\mu}$ **sur** $\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ **vérifiant la propriété** : $\boxed{\textbf{Il existe } \mathbf{M} > \mathbf{0} \textbf{ tel que } \forall\, \mathbf{f} \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \ \ |\tilde{\mu}(\mathbf{f})| \leq \mathbf{M}\, \|\mathbf{f}\|}$.

On note $\mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures normées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \Big(\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}), \|\ \|\Big)}$.

On munit $\mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ de la **norme duale** $\|\ \|_{\star}$.

Notation intégrale :

$\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \ \ \forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ on note $\boxed{\displaystyle\int_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}} f(X)\, \tilde{\mu}(X) = \int_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}} f\, \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(f)}$.

2.15. Définition :

Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$; on pose $\forall\, j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\tilde{\mu}_{(j)} = \text{restriction de } \tilde{\mu} \text{ à } \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})}$.

$\tilde{\mu}_{(j)}$ peut naturellement être considéré comme une pseudo-mesure normée sur $\mathbb{R}^{j+1}$.

2.16.* Théorème : Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$; alors on a $\forall\, j \in \mathbb{N}$ $\boxed{\tilde{\mu}_{(j)} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\mathbb{R}^{j+1})}$,

$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{\mu}_{(j)}\|_{\star} = \|\tilde{\mu}\|_{\star}}$ et $\forall\, j \in \mathbb{N} \ \ \forall f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{(j+1)}(f) = \tilde{\mu}_{(j)}(f)}$.

Réciproquement soit une suite $\tilde{\mu}_j \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\mathbb{R}^{j+1})$ telle que $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{\mu}_j\|_{\star} < +\infty$ et $\forall\, j \in \mathbb{N} \ \ \forall f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1})$ $\tilde{\mu}_{j+1}(f) = \tilde{\mu}_j(f)$; alors la suite $\tilde{\mu}_j$ définit de manière naturelle une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$, d'où le théorème suivant :

2.17.* Théorème :

La donnée d'une pseudo-mesure normée $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est équivalente à la donnée d'une suite de pseudo-mesures normées $\tilde{\mu}_j \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\mathbb{R}^{j+1})$ telle que

$$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{\mu}_j\|_{\star} < +\infty} \quad \text{et} \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \ \ \forall f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^{j+1}) \ \ \boxed{\tilde{\mu}_{j+1}(f) = \tilde{\mu}_j(f)}.$$

La suite $\|\tilde{\mu}_j\|_{\star}$ est alors croissante et on a $\boxed{\|\tilde{\mu}\|_{\star} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\tilde{\mu}_j\|_{\star}}$.

Les conditions du théorème précédent signifient donc explicitement :

$$\boxed{\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{j+1}} |\tilde{\mu}_j| < +\infty} \quad \underline{\text{et}} \quad \boxed{\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}^{j+1} \quad \boxed{\int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}_{j+1}(\omega, x) = \tilde{\mu}_j(\omega)}}.$$

2.18.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\boxed{\tilde{\mu} \leq \tilde{\nu} \;\Leftrightarrow\; [\,\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}_{(j)} \leq \tilde{\nu}_{(j)}\,]}$.

2.19.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$ $\boxed{|\tilde{\mu}|_{(j)} = |\tilde{\mu}_{(j)}|}$.

2.20. Définition :

$\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est une mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $\boxed{\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}_{(j)} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^{j+1})}$.

On note $\mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'espace vectoriel des mesures normées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

2.21.* Théorème : $\mathcal{PM}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ et $\mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ sont des espaces de Riesz-Banach.

2.22. Définition : $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^{+}$ est une (mesure de) probabilité sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $\boxed{\|\tilde{\mu}\|_{\star} = 1}$

On note $\mathcal{P}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'ensemble des probabilités sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

2.23. Définition :

$\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^{+}$ est un processus stochastique sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $\boxed{\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}_{(j)} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{j+1})}$.

On note $\mathcal{PS}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{P}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'ensemble des processus stochastiques sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

§ 3. Compacts élémentaires de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

Soit T_i une suite d'intervalles compacts non vides de $\mathbb{R}$; on pose

$$\mathsf{K} = \{\, X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}} \;\|\; \forall\, i \in \mathbb{N} \;\; X(i) \in \mathrm{T}_i \,\} \subset \overset{\infty}{\mathbb{R}}.$$

On munit K de la topologie induite par celle de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$. L'espace K est donc métrisable. C'est l'espace des suites réelles dont pour tout $i \in \mathbb{N}$ le $i^{\text{ème}}$ terme appartient à T_i. L'espace K est homéomorphe au produit cartésien infini $\underset{i \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}}\, \mathrm{T}_i$.

3.1. Théorème : K est un espace topologique $\boxed{\text{compact}}$; un tel compact s'appelle un compact élémentaire (coel) de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

Dém : C'est un produit (dénombrable) d'espaces compacts.

3.2. Théorème : Tout compact de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est inclus à un coel.

Dém :

Soit K un compact de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$; supposons qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\limits_{X \in \mathsf{K}} |X(i)| = +\infty$; soit une suite $X_n \in \mathsf{K}$ telle que $|X_n(i)| \to +\infty$; alors aucune sous-suite de X_n ne pourrait converger dans $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ car la convergence dans $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ implique la convergence en i ; donc $\sup\limits_{X \in \mathsf{K}} |X(i)| < +\infty$; posons $\forall i \in \mathbb{N} \quad \theta_i = \sup\limits_{X \in \mathsf{K}} |X(i)|$ et $\mathrm{T}_i = [-\theta_i, \theta_i]$; on a alors $\mathsf{K} \subset \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{T}_i$.

3.3.* Corollaire : $\mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est l'algèbre des fonctions bornées sur tout coel de $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

3.4. Définition : $f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est continue en $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ sur le coel $\mathsf{K} \ni X$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que $\forall Y \in \mathsf{K}$

$$\boxed{\big[\, \forall i \leq j \quad |Y(i) - X(i)| \leq \eta \,\big] \Rightarrow |f(Y) - f(X)| \leq \varepsilon}\,.$$

Remarque : Ceci revient à exiger que $f|_{\mathsf{K}}$ est continue en X.

3.5. Théorème :

$f \in \mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est continue en $X \in \overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi f est continue sur tout coel $\mathsf{K} \ni X$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Trivial.

b) $\Leftarrow$: Supposons par exemple que f n'est pas continue en 0 ; alors il existe $\varepsilon > 0$, une suite $\eta_j > 0$, que l'on peut supposer décroissante, et une suite Y_j tels que $\forall i \leq j \quad |Y_j(i)| \leq \eta_j$ et $|f(Y_j)| > \varepsilon$. Posons $\forall i \in \mathbb{N} \quad \theta_i = \max\limits_{j \in \mathbb{N}} |Y_j(i)|$, ce qui a un sens car $\forall j \geq i \quad |Y_j(i)| \leq \eta_j \leq \eta_i$; posons $\forall i \in \mathbb{N} \quad \mathrm{T}_i = [-\theta_i, \theta_i]$ et $\mathsf{K} = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{T}_i$; on a $\forall i, j \in \mathbb{N} \quad Y_j(i) \leq \theta_i$, donc $\forall j \in \mathbb{N} \quad Y_j \in \mathsf{K}$, donc f n'est pas continue en 0 sur $\mathsf{K} \ni 0$.

Notation : Pour tout coel K on note $\mathcal{F}(\mathsf{K})$ l'algèbre des fonctions bornées $\mathsf{K} \to \mathbb{R}$; de même on note $\mathcal{C}(\mathsf{K})$ l'algèbre des fonctions continues $\mathsf{K} \to \mathbb{R}$.

3.6. Définition : Une fonction de $\mathcal{F}(\mathsf{K})$ est étagée sur K ssi elle est la restriction à K d'une fonction de $\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$. On note $\mathcal{E}(\mathsf{K})$ l'algèbre de Riesz des fonctions étagées sur K.

3.7.* Théorème : $\mathcal{E}(\mathsf{K})$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathsf{K})$ pour la norme uniforme.

Dém : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathsf{K})$ et soit $\varepsilon > 0$; comme K est compact, f est uniformément continue ; il existe donc $j \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que $\forall X, Y \in \mathsf{K}$

$$\big[\, \forall i \leq j \quad |Y(i) - X(i)| \leq \eta \,\big] \Rightarrow |f(Y) - f(X)| \leq \varepsilon .$$

Posons $\mathsf{P} = \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}_1 \times \ldots \times \mathrm{T}_j = \underset{0 \leq i \leq j}{\mathsf{X}} \mathrm{T}_i$ et $\mathsf{Q} = \underset{i \geq j+1}{\mathsf{X}} \mathrm{T}_i$; on a $\mathsf{K} = \mathsf{P} \times \mathsf{Q}$;

on peut donc écrire $\forall x, y \in \mathsf{P} \quad \forall X, Y \in \mathsf{Q}$

$$\big[\, \forall i \leq j \quad |x_i - y_i| \leq \eta \,\big] \Rightarrow |f(y, Y) - f(x, X)| \leq \varepsilon .$$

Choisissons $X_\star$ fixe dans Q ; on définit une fonction g sur P en posant $\forall x \in \mathsf{P}$ $g(x) = f(x, X_\star)$; on vérifie facilement que $g \in \mathcal{C}(\mathsf{P})$; P étant un pavé compact de dimension finie, il existe $h \in \mathcal{E}(\mathsf{P})$ tel que $\forall x \in \mathsf{P} \quad |h(x) - g(x)| \leq \varepsilon$;

h s'identifie naturellement à une fonction de $\mathcal{E}(\mathsf{K})$ en posant

$\forall x \in \mathsf{P} \quad \forall X \in \mathsf{Q} \quad h(x, X) = h(x)$; on peut alors écrire $\forall x \in \mathsf{P} \quad \forall X \in \mathsf{Q}$

$|h(x, X) - f(x, X)| = |h(x, X) - f(x, X_\star)| + |f(x, X_\star) - f(x, X)|$

$= |h(x) - g(x)| + |f(x, X_\star) - f(x, X)| \leq 2\,\varepsilon .$

On peut faire sur un coel K la même théorie que sur $[a, b]$ dans la Première partie :

3.8. Définition fondamentale :

Une pseudo-mesure sur K est un élément du N-dual de l'espace normé $\big(\mathcal{E}(\mathsf{K}), \|\ \|\big)$.

Ou encore : Une pseudo-mesure sur K est une forme linéaire $\tilde{\mu} : \mathcal{E}(\mathsf{K}) \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété : $\boxed{\text{Il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{E}(\mathsf{K}) \quad |\tilde{\mu}(f)| \leq M \|f\|}$.

On note $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures sur K.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{PM}(\mathsf{K}) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}(\mathsf{K}), \|\ \|\big)}$.

Contrairement à ce qui se passe pour les espaces $\mathbb{R}^n$, qui sont localement compacts, le prolongement par 0 d'une fonction de $\mathcal{E}(\mathsf{K})$ n'est pas une fonction de $\mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ (sauf pour la fonction nulle). Une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ n'a donc pas pour le moment de valeur naturelle sur $\mathcal{E}(\mathsf{K})$; c'est l'objet de la définition suivante.

3.9. Théorème-Définition :

Soit un coel $\mathsf{K} = \underset{i \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}} \mathrm{T}_i$; $\forall j \in \mathbb{N}$ on note $\Lambda_j \in \mathcal{E}\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ la fonction caractéristique de $\mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2 \times \ldots \times \mathrm{T}_j \times \overset{\infty}{\mathbb{R}}$; soit $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^\bullet\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$; alors la suite $\Lambda_j \tilde{\mu}$ est convergente en norme $\|\ \|_\star$ dans $\mathcal{PM}^\bullet\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$ et on pose $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathsf{K}} = {}^\star\lim_j \,(\Lambda_j \tilde{\mu})} \in \mathcal{PM}^\bullet\big(\overset{\infty}{\mathbb{R}}\big)$.

On a $\boxed{\| \tilde{\mu}_{\mathsf{K}} \|_\star \leq \| \tilde{\mu} \|_\star}$ et $\forall g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ $\boxed{g.(\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}) = (g\,\tilde{\mu})_{\mathsf{K}}}$; de plus $\boxed{|\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}| = |\tilde{\mu}|_{\mathsf{K}}}$

donc aussi $\boxed{(\tilde{\mu}_{\mathsf{K}})^+ = (\tilde{\mu}^+)_{\mathsf{K}}}$ et $\boxed{(\tilde{\mu}_{\mathsf{K}})^- = (\tilde{\mu}^-)_{\mathsf{K}}}$.

$\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}$ s'appelle la <u>restriction</u> à K de $\tilde{\mu}$ et on note $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f) = \int_{\mathsf{K}} f\,\tilde{\mu}}$.

<u>Dém</u> : Soit d'abord $\tilde{\mu} \geq 0$; alors la suite $\Lambda_j\,\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ est positive et décroissante ; elle est dès lors convergente en norme $\|\ \|_\star$ dans $\mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$;
pour $\tilde{\mu}$ quelconque on a $\Lambda_j\,\tilde{\mu} = \Lambda_j\,\tilde{\mu}^+ - \Lambda_j\,\tilde{\mu}^-$, qui est donc aussi convergente.

3.10. <u>Théorème</u> : $\forall f, g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ on a $\Big[f|_{\mathsf{K}} = g|_{\mathsf{K}} \Rightarrow \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f) = \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(g) \Big]$.

<u>Dém</u> : On a $\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f) = \lim_j \big[(\Lambda_j\,\tilde{\mu})(f)\big] = \lim_j \tilde{\mu}(\Lambda_j\,f)$; or pour j suffisamment grand $\Lambda_j\,f = \Lambda_j\,g$; d'où le résultat.

3.11. <u>Définition</u> : En vertu du théorème précédent on peut <u>identifier</u> $\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}$ à l'élément de $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ défini par $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f|_{\mathsf{K}}) = \tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f)}$. $\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}$ a d'ailleurs la même norme en tant qu'élément de $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ qu'en tant qu'élément de $\mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$.

3.12. <u>Théorème</u> : $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathsf{K})$ il existe un unique $\langle \tilde{\mu} \rangle \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ tel que $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} = \tilde{\mu}}$ et $\boxed{\| \langle \tilde{\mu} \rangle \|_\star = \| \tilde{\mu} \|_\star}$. $\langle \tilde{\mu} \rangle$ est défini par $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle(f) = \tilde{\mu}(f|_{\mathsf{K}})}$
et s'appelle la pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ <u>engendrée</u> par $\tilde{\mu}$.

On a $\forall g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ $\boxed{g.\langle \tilde{\mu} \rangle = \langle g|_{\mathsf{K}}\,\tilde{\mu} \rangle}$; de plus $\boxed{|\langle \tilde{\mu} \rangle| = \langle |\tilde{\mu}| \rangle}$,

donc aussi $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle^+ = \langle \tilde{\mu}^+ \rangle}$ et $\boxed{\langle \tilde{\mu} \rangle^- = \langle \tilde{\mu}^- \rangle}$.

<u>Dém</u> :

1) Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathsf{K})$; posons $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ $\langle \tilde{\mu} \rangle(f) = \tilde{\mu}(f|_{\mathsf{K}})$; montrons que $\langle \tilde{\mu} \rangle \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$. La linéarité de $\langle \tilde{\mu} \rangle$ est évidente ; par ailleurs on a $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$
$|\langle \tilde{\mu} \rangle(f)| = |\tilde{\mu}(f|_{\mathsf{K}})| \leq \| \tilde{\mu} \|_\star \, \| f|_{\mathsf{K}} \| \leq \| \tilde{\mu} \|_\star \, \| f \|$; donc $\langle \tilde{\mu} \rangle \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ et $\| \langle \tilde{\mu} \rangle \|_\star \leq \| \tilde{\mu} \|_\star$.

Montrons maintenant $\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} = \tilde{\mu}$; soit $f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$; on a $\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}}(f|_{\mathsf{K}}) = \langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}}(f)$ $= \lim_j \langle \tilde{\mu} \rangle(\Lambda_j\,f) = \lim_j \tilde{\mu}\big[(\Lambda_j\,f)|_{\mathsf{K}}\big] = \tilde{\mu}(f|_{\mathsf{K}})$ car $\forall j \in \mathrm{I\!N}$ $(\Lambda_j\,f)|_{\mathsf{K}} = f|_{\mathsf{K}}$;
on en déduit $\langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} = \tilde{\mu}$; on a donc aussi $\| \tilde{\mu} \|_\star = \| \langle \tilde{\mu} \rangle_{\mathsf{K}} \|_\star \leq \| \langle \tilde{\mu} \rangle \|_\star$; donc $\| \tilde{\mu} \|_\star = \| \langle \tilde{\mu} \rangle \|_\star$.

2) Soit $g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$; on a $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}) \quad [g.\langle \tilde\mu \rangle](f) = \langle \tilde\mu \rangle (g\, f) = \tilde\mu\,[(f\, g)|_{\mathsf{K}}]$
$= \tilde\mu[f|_{\mathsf{K}}\, g|_{\mathsf{K}}] = (g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu)(f|_{\mathsf{K}}) = \langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu \rangle (f)$; donc $g.\langle \tilde\mu \rangle = \langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu \rangle$.

3) $\forall\, g \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})^+$ on a $|\langle \tilde\mu \rangle|(g) = \|\, g.\langle \tilde\mu \rangle\|_\star = \|\langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu \rangle\|_\star = \sup\limits_{\|f\| \leq 1} \langle g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu \rangle (f)$
$= \sup\limits_{\|f\| \leq 1} (g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu)(f|_{\mathsf{K}}) = \sup\limits_{\|f|_{\mathsf{K}}\| \leq 1} (g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu)(f|_{\mathsf{K}}) = \|\, g|_{\mathsf{K}}\, \tilde\mu\|_\star = |\tilde\mu|\,(g|_{\mathsf{K}}) = \langle |\tilde\mu| \rangle (g)$.

4) Montrons l'unicité. Soit $\tilde\pi \in \mathcal{PM}^\bullet(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})$ tel que $\tilde\pi_{\mathsf{K}} = \tilde\mu$ et $\|\tilde\pi\|_\star = \|\tilde\mu\|_\star$;
supposons d'abord $\tilde\mu \geq 0$; alors $\langle \tilde\mu \rangle \geq 0$; on a $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})^+ \quad \tilde\pi_{\mathsf{K}}(f|_{\mathsf{K}}) = \tilde\pi_{\mathsf{K}}(f)$
$= \lim\limits_j (\Lambda_j\, \tilde\pi)(f) = \lim\limits_j (\Lambda_j\, \tilde\pi^+)(f) - \lim\limits_j (\Lambda_j\, \tilde\pi^-)(f) = \tilde\mu\,(f|_{\mathsf{K}}) = \langle \tilde\mu \rangle (f)$;
donc $\forall f \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})^+ \quad \tilde\pi^+(f) \geq \lim\limits_j (\Lambda_j\, \tilde\pi^+)(f) \geq \langle \tilde\mu \rangle (f)$; donc $\tilde\pi^+ \geq \langle \tilde\mu \rangle \geq 0$,
par ailleurs $\|\tilde\pi\|_\star = \|\tilde\mu\|_\star = \|\langle \tilde\mu \rangle\|_\star$, donc $\tilde\pi = \langle \tilde\mu \rangle$.

Supposons maintenant $\tilde\mu$ non nécessairement ≥ 0 ; on a $(\tilde\pi^+)_{\mathsf{K}} = (\tilde\pi_{\mathsf{K}})^+ = \tilde\mu^+$;
donc $\|\tilde\pi^+\|_\star \geq \|\tilde\mu^+\|_\star$; de même $(\tilde\pi^-)_{\mathsf{K}} = (\tilde\pi_{\mathsf{K}})^- = \tilde\mu^-$, donc $\|\tilde\pi^-\|_\star \geq \|\tilde\mu^-\|_\star$;
comme on a $\|\tilde\pi\|_\star = \|\tilde\mu\|_\star$, on en déduit $\|\tilde\pi^+\|_\star = \|\tilde\mu^+\|_\star$ et $\|\tilde\pi^-\|_\star = \|\tilde\mu^-\|_\star$,
donc $\tilde\pi^+ = \langle \tilde\mu^+ \rangle = \langle \tilde\mu \rangle^+$ et $\tilde\pi^- = \langle \tilde\mu^- \rangle = \langle \tilde\mu \rangle^-$, c-à-d $\tilde\pi = \langle \tilde\mu \rangle$.

3.13. Corollaire :

Toute pseudo-mesure sur K est la restriction à K d'une pseudo-mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$.

Le corollaire précédent justifie la définition suivante :

3.14. Définition : Une mesure sur K est une pseudo-mesure sur K qui est la restriction à K d'une mesure normée sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$.

On note $\mathcal{M}(\mathsf{K})$ l'espace vectoriel des mesures sur K.

3.15.* Théorème : $\mathcal{PM}(\mathsf{K})$ et $\mathcal{M}(\mathsf{K})$ sont des espaces de Riesz-Banach.

Comme sur $[\mathrm{a,b}]$ on définira successivement les algèbres suivantes de fonctions sur K :

$\mathcal{R}(\mathsf{K}) =$ fonctions réglées sur K = limites uniformes de fonctions de $\mathcal{E}(\mathsf{K})$

$\mathcal{PR}(\mathsf{K}) =$ fonctions pseudo-réglées sur K
= limites simples bornées de fonctions de $\mathcal{E}(\mathsf{K})$

$\mathcal{W}(\mathsf{K}) =$ fonctions universelles sur K : une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathsf{K})$ est universelle ssi

$$\boxed{\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathsf{K})^+ \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad g, h \in \mathcal{PR}(\mathsf{K}) \quad \text{tels que} \quad g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad \tilde\mu\,(h-g) \leq \varepsilon}$$

Ces espaces vérifient les mêmes propriétés et théorèmes que sur $[\mathbf{a,b}]$.

On a $\boxed{\mathcal{E}(\mathsf{K})+\mathcal{C}(\mathsf{K})\subset\mathcal{R}(\mathsf{K})\subset\mathcal{PR}(\mathsf{K})\subset\mathcal{W}(\mathsf{K})\subset\mathcal{F}(\mathsf{K})}$.

$\mathcal{R}(\mathsf{K})$, $\mathcal{PR}(\mathsf{K})$, $\mathcal{W}(\mathsf{K})$, $\mathcal{F}(\mathsf{K})$ sont des algèbres de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

On peut alors définir les algèbres correspondantes sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$:

3.16. <u>Définition</u> :

$f\in\mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est <u>réglée</u> sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $f|_{\mathsf{K}}\in\mathcal{R}(\mathsf{K})$ pour tout coel K.

$f\in\mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est <u>pseudo-réglée</u> sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $f|_{\mathsf{K}}\in\mathcal{PR}(\mathsf{K})$ pour tout coel K.

$f\in\mathcal{F}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est <u>universelle</u> sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ ssi $f|_{\mathsf{K}}\in\mathcal{W}(\mathsf{K})$ pour tout coel K.

<u>*Notation*</u> : $\mathcal{R}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ = algèbre de Riesz des fonctions réglées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$\mathcal{PR}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ = algèbre de Riesz des fonctions pseudo-réglées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

$\mathcal{W}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ = algèbre de Riesz des fonctions universelles sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.

On a $\boxed{\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})+\mathcal{C}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})\subset\mathcal{R}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})\subset\mathcal{PR}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})\subset\mathcal{W}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})}$.

On note $\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ l'algèbre des fonctions universelles bornées sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$.
$\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est une algèbre de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

3.17. <u>Définition</u> : $\forall\tilde{\mu}\in\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+$ $\forall f\in\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}(f)=\sup\limits_{\mathsf{K}\text{ coel}}\tilde{\mu}_{\mathsf{K}}(f|_{\mathsf{K}})}$;

$\forall\tilde{\mu}\in\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ $\forall f\in\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}(f)=\tilde{\mu}^+(f^+)-\tilde{\mu}^+(f^-)-\tilde{\mu}^-(f^+)+\tilde{\mu}^-(f^-)}$

On a ainsi étendu l'action de $\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ à $\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$; jusqu'à présent cette action n'était définie que sur $\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

3.18. <u>Théorème</u> : $\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

§ 4. Espaces associés à une mesure normée positive sur $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$

On se donne une mesure normée positive $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})^+}$.

Les espaces Ω peuvent s'étudier comme cas particuliers de l'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$, en choisissant des mesures $\tilde{\mu}$ dont les restrictions $\tilde{\mu}_{(j)}$ à $\mathbb{R}^{j+1}$ sont discrètes.
Il en va de même pour l'espace $\mathbb{R}^n$, qui peut être considéré comme l'espace $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$, portant une mesure définie par la suite $\forall\, j \geq n \;\; \tilde{\mu}_j = \tilde{\pi} \otimes \underbrace{\delta_0 \otimes \ldots \otimes \delta_0}_{j+1-n \text{ fois}}$, où $\tilde{\pi}$ est une mesure sur $\mathbb{R}^n$ et δ_0 est la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$ en 0.

4.1. Définition : On pose $\boxed{\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \,.\, \tilde{\mu} = \{ h \,.\, \tilde{\mu} \parallel h \in \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \}}$.

$\mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \,.\, \tilde{\mu}$ est un sous-espace de l'espace de Riesz-Banach $\mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})$.

4.2. Définition :

$\boxed{[\,\tilde{\mu}\,] \text{ est la } \underline{\text{fermeture}} \text{ de } \mathcal{E}(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \,.\, \tilde{\mu} \text{ dans } \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}}) \text{ pour la norme } \|\;\|_\star}$

Les éléments de $[\,\tilde{\mu}\,]$ s'appellent les $\boxed{\text{mesures normées de base } \tilde{\mu}}$.

4.3.* Théorème : $[\,\tilde{\mu}\,]$ est un espace de Riesz-Banach pour la norme $\|\;\|_\star$.

4.4.* Théorème : $\boxed{[\,\tilde{\mu}\,] \text{ est un sous-espace intégral de } \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})}$

4.5. Définition :

On pose $\boxed{\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) = \dfrac{1}{\tilde{\mu}}\,[\,\tilde{\mu}\,] = \left\{ \dfrac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} \;\middle\|\; \tilde{\nu} \in [\,\tilde{\mu}\,] \right\}}$; on a donc $\boxed{[\,\tilde{\mu}\,] = \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \,.\, \tilde{\mu}}$.

Les éléments de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ s'appellent les $\underline{\tilde{\mu}\text{–fonctionnelles sommables}}$; elles sont représentées par des lettres "droites" ; on peut écrire

$$\boxed{\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;\Rightarrow\; \mathrm{f}\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,] \subset \mathcal{M}^\bullet(\overset{\infty}{\mathbb{R}})}\,.$$

4.6. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}(\mathrm{f}) = (\mathrm{f}\,\tilde{\mu})(\mathbb{1}) \;\text{ avec }\; \mathbb{1} = \mathbb{1}_{\overset{\infty}{\mathbb{R}}}}$.

4.7. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},1} = \|\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\|_\star = \tilde{\mu}(|\mathrm{f}|)}$.

Notation intégrale : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on note $\boxed{\int_{\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}} \mathrm{f}\,(X)\,\tilde{\mu}\,(X) \;=\; \int_{\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}} \mathrm{f}\,\tilde{\mu} \;=\; \tilde{\mu}\,(\mathrm{f})}$.

4.8. Définition : $\forall\, f \in \mathcal{W}_B\big(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}\big)$ on pose $\boxed{\{f\}_{\tilde{\mu}} = \dfrac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

$\{f\}_{\tilde{\mu}}$ s'appelle la $\tilde{\mu}$–fonctionnelle associée à f.

4.9.* Théorème :

L'application $\boxed{\mathcal{W}_B\big(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}\big) \;\to\; \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;:\; f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}}$ est un morphisme de Riesz.

On définit $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})\,,\ \mathcal{B}(\tilde{\mu})\,,\ \mathcal{K}(\tilde{\mu})\,,\ \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ comme dans la Quatrième Partie, **avec les mêmes propriétés et théorèmes**.

Notation pratique : Soit A une partie de $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$ telle que $\mathbb{1}_{\mathsf{A}} \in \mathcal{W}_B\big(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}\big)$;

alors on note $\boxed{\tilde{\mu}\,(\mathsf{A}) = \tilde{\mu}\,(\mathbb{1}_{\mathsf{A}})}$; si de plus $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on note $\boxed{\int_{\mathsf{A}} \mathrm{f}\,\tilde{\mu} \;=\; \tilde{\mu}\,(\mathrm{f}\,.\,\mathbb{1}_{\mathsf{A}})}$.

4.10.* Théorème : Soit $j \in \mathrm{I\!N}$ et A une partie de $\mathrm{I\!R}^{\,j+1}$ telle que $\mathbb{1}_{\mathsf{A}} \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^{\,j+1})$;

alors on a $\boxed{\tilde{\mu}_{(j)}\,(\mathsf{A}) = \tilde{\mu}\,(\mathsf{A} \times \overset{\infty}{\mathrm{I\!R}})}$.

CHAPITRE XXIV

PROBABILITES

$\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ est muni d'une probabilité $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\overset{\infty}{\mathbb{R}})}$.

§ 1. Vocabulaire des probabilités

Elément de $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ = Variable aléatoire = v. a.

Si $\mathsf{F} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$: $\tilde{\mu}(\mathsf{F}) = \widehat{m}(\mathsf{F})$ = Moyenne de F

$\tilde{\mu}\big(|\mathsf{F} - \tilde{\mu}(\mathsf{F})|\big) = U(\mathsf{F})$ = Ecart moyen de F.

Si $\mathsf{F} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$: $\tilde{\mu}\big[\mathsf{F} - \tilde{\mu}(\mathsf{F})\big]^2 = V(\mathsf{F})$ = Variance de F ; on a $\boxed{U(\mathsf{F}) \le \sqrt{V(\mathsf{F})}}$.

Si $\mathsf{F} \in \mathcal{L}^4(\tilde{\mu})$: $\tilde{\mu}\big[\mathsf{F} - \tilde{\mu}(\mathsf{F})\big]^4 = W(\mathsf{F})$ = Bivariance de F ; on a $\boxed{V(\mathsf{F}) \le \sqrt{W(\mathsf{F})}}$.

Elément de $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$ = Evénement

Si σ est un événement : $1 - \sigma$ = " non σ "

Si σ et τ sont des événements : $\sigma \vee \tau$ = " σ ou τ "

$\sigma \wedge \tau = \sigma\, \tau$ = " σ et τ "

Si σ_n est une suite d'événements : $\operatorname{Sup}_n \sigma_n$ = " au moins un σ_n "

$\operatorname{Inf}_n \sigma_n = \prod_n \sigma_n$ = " tous les σ_n "

$\overline{\operatorname{Lim}}_{n \to +\infty} \sigma_n$ = " une infinité de σ_n " ≫

$\underline{\operatorname{Lim}}_{n \to +\infty} \sigma_n$ = " une infinité de σ_n consécutifs "

Les événements $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont indépendants ssi pour tout sous-ensemble d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(2 \le k \le n)$ on a $\boxed{\tilde{\mu}(\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_k}) = \tilde{\mu}(\sigma_{i_1})\,\tilde{\mu}(\sigma_{i_2}) \ldots \tilde{\mu}(\sigma_{i_k})}$.

Une suite de $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$ est une suite d'événements indépendants ssi les événements de toute partie finie de la suite sont indépendants.

Si σ_n est une suite d'événements indépendants on a $\boxed{\tilde{\mu}\big(\prod_n \sigma_n\big) = \prod_n \tilde{\mu}(\sigma_n)}$.

Les v. a. $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots, \mathsf{F}_n$ sont <u>indépendantes</u> ssi $\forall\, g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$

$$\boxed{\tilde{\mu}\left[(g_1 \circ \mathsf{F}_1)(g_2 \circ \mathsf{F}_2) \ldots (g_n \circ \mathsf{F}_n)\right] = \tilde{\mu}(g_1 \circ \mathsf{F}_1)\, \tilde{\mu}(g_2 \circ \mathsf{F}_2) \ldots \tilde{\mu}(g_n \circ \mathsf{F}_n)}\;;$$

dans ce cas l'égalité est encore vraie si $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathcal{R}(\mathrm{I\!R})$, à condition que $(g_1 \circ \mathsf{F}_1)(g_2 \circ \mathsf{F}_2) \ldots (g_n \circ \mathsf{F}_n) \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et que $\forall\, i \;\; g_i \circ \mathsf{F}_i \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

Une suite de $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ est une suite de v. a. <u>indépendantes</u> ssi les v. a. de toute partie <u>finie</u> de la suite sont indépendantes.

Les v. a. $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots, \mathsf{F}_n$ sont <u>indépendantes deux à deux</u> ssi $\forall\, i \neq j$ les v. a. F_i et F_j sont indépendantes ; si de plus $\forall\, i \;\; \mathsf{F}_i \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$, on peut écrire

$$\boxed{V(\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2 + \ldots + \mathsf{F}_n) = V(\mathsf{F}_1) + V(\mathsf{F}_2) + \ldots + V(\mathsf{F}_n)}\,.$$

<u>Exemple I</u> :

Soit une suite $\tilde{\phi}_n \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R})$; $\forall\, j \in \mathrm{I\!N}$ on pose $\tilde{\mu}_j = \tilde{\phi}_0 \otimes \tilde{\phi}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\phi}_j \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^{j+1})$.
On voit facilement que la suite $\tilde{\mu}_j$ définit un <u>processus stochastique</u> $\tilde{\mu}$ sur $\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}$.

On pose $\forall\, n \in \mathrm{I\!N} \;\; X_n : \overset{\infty}{\mathrm{I\!R}} \to \mathrm{I\!R} : X \mapsto X(n)$; alors $\forall\, n \in \mathrm{I\!N} \;\; X_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ et les v. a. X_n sont indépendantes.
$\big(\overset{\infty}{\mathrm{I\!R}}, \tilde{\mu}\big)$ constitue le modèle probabiliste associé à la donnée d'une suite abstraite de v. a. indépendantes X_n de lois $\tilde{\phi}_n$.

<u>Exemple II</u> :

Un processus stochastique tel que $\forall\, j \in \mathrm{I\!N} \;\; \tilde{\mu}_{j+1} = f_j(x_{j+1})\, \tilde{\mu}_j$ avec $f_j \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{I\!R}} f_j(x)\, dx = 1$ constitue un cas particuler de l'exemple I ; si on généralise au cas où $\forall\, j \in \mathrm{I\!N}$ $\boxed{\tilde{\mu}_{j+1} = f_j(x_j, x_{j+1})\, \tilde{\mu}_j}$ avec $f_j \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R}^2)$ et $\forall\, u \in \mathrm{I\!R} \displaystyle\int_{\mathrm{I\!R}} f_j(u, x)\, dx = 1$, on obtient une <u>chaîne de Markov</u>.

§ 2. **Applications**

2.1. Lemme de Borel-Cantelli

Soit σ_n une suite d'événements et posons $\sigma = \overline{\operatorname{Lim}}_{n \to +\infty} \sigma_n$; alors on a

1) $\sum_n \tilde{\mu}(\sigma_n) < +\infty \ \Rightarrow \ \tilde{\mu}(\sigma) = 0$

2) $\Big[\sum_n \tilde{\mu}(\sigma_n) = +\infty$ et les σ_n indépendants$\Big] \ \Rightarrow \ \tilde{\mu}(\sigma) = 1$.

Dém :

a) Posons $\forall p \in \mathbb{N} \quad \tau_p = \operatorname{Sup}_{n \geq p} \sigma_n$; on a alors $\tilde{\mu}(\tau_p) \leq \sum_{n \geq p} \tilde{\mu}(\sigma_n)$; comme $\sigma = \operatorname{Inf}_p \tau_p$, on a $\forall p \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}(\sigma) \leq \tilde{\mu}(\tau_p) \leq \sum_{n \geq p} \tilde{\mu}(\sigma_n)$; or $\sum_n \tilde{\mu}(\sigma_n)$ est convergente, donc $\tilde{\mu}(\sigma) = 0$.

b) On a $1 - \sigma = \underline{\operatorname{Lim}}_{n \to +\infty} (1 - \sigma_n) = \operatorname{Sup}_p \operatorname{Inf}_{n \geq p} (1 - \sigma_n)$; posons $\forall p \in \mathbb{N}$ $\tau_p = \operatorname{Inf}_{n \geq p} (1 - \sigma_n)$; comme les événements $1 - \sigma_n$ sont indépendants, on a $\tilde{\mu}(\tau_p) = \prod_{n \geq p} \tilde{\mu}(1 - \sigma_n) = \prod_{n \geq p} \big[1 - \tilde{\mu}(\sigma_n)\big]$; or $\sum_n \tilde{\mu}(\sigma_n)$ est divergente, donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $\tilde{\mu}(\tau_p) = 0$, donc $1 - \sigma = \operatorname{Sup}_p \tau_p = 0$, donc $1 - \tilde{\mu}(\sigma) \leq \sum_p \tau_p = 0$, donc $\tilde{\mu}(\sigma) = 1$.

2.2. Théorème :

Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^4(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de moyenne $\widehat{m}$; on suppose qu'il existe $W_* > 0$ tel que $\forall i \ \ W(\mathrm{f}_i) \leq W_*$; on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$; alors $\forall \varepsilon > 0$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\Big\{ \Big| \frac{\mathsf{S}_n}{n} - \widehat{m} \Big| > \varepsilon \Big\} \leq \frac{3\, W_*}{n^2\, \varepsilon^4}}$.

Dém : $\tilde{\mu}\Big\{ \Big| \frac{\mathsf{S}_n}{n} - \widehat{m} \Big| \geq \varepsilon \Big\} = \tilde{\mu}\Big\{ \Big[\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \widehat{m} \Big]^4 \geq \varepsilon^4 \Big\} \leq \frac{1}{\varepsilon^4}\, \tilde{\mu}\Big[\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \widehat{m} \Big]^4$

$$= \frac{1}{n^4 \varepsilon^4}\, \tilde{\mu}\big[\mathsf{S}_n - n\, \widehat{m}\big]^4 = \frac{1}{n^4 \varepsilon^4}\, \tilde{\mu}\Big[\sum_i (\mathrm{f}_i - \widehat{m}) \Big]^4$$

$$= \frac{1}{n^4 \varepsilon^4} \Big[\sum_i W(\mathrm{f}_i) + 6 \sum_{i<j} V(\mathrm{f}_i) V(\mathrm{f}_j) \Big] \leq \frac{1}{n^4 \varepsilon^4} \Big[\sum_i W(\mathrm{f}_i) + 6 \sum_{i<j} \sqrt{W(\mathrm{f}_i) W(\mathrm{f}_j)} \Big]$$

$$\leq \frac{1}{n^4 \varepsilon^4} \Big[\sum_i W_* + 6 \sum_{i<j} W_* \Big] \leq \frac{W_*}{n^4 \varepsilon^4} \big[n + 3\, n\, (n-1) \big] \leq \frac{3\, n^2\, W_*}{n^4\, \varepsilon^4} = \frac{3\, W_*}{n^2\, \varepsilon^4}.$$

2.3. Loi forte des grands nombres I

Soit une suite de v.a. indépendantes $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^4(\tilde{\mu})$ de moyenne $\widehat{m}$, telle que la suite $W(\mathrm{f}_n)$ soit **majorée** ; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\ \mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$;

alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} \widehat{m}}$, c-à-d $\forall\, \varepsilon > 0$ $\ \overline{\mathrm{Lim}}_n \left\{ \left| \dfrac{\mathsf{S}_n}{n} - \widehat{m} \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$.

Dém : On applique le théorème précédent et le cas 1) du lemme de Borel-Cantelli.

2.4. Corollaire

Soit une suite **bornée** de v.a. indépendantes $\mathrm{f}_n \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ de moyenne $\widehat{m}$;

on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\ \mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$; alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\times}{\to} \widehat{m}}$.

Dém : La suite $W(\mathrm{f}_n)$ est trivialement majorée, donc $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} \widehat{m}$;
mais la suite $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n}$ est **bornée** (par la même constante que la suite f_n), donc $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\times}{\to} \widehat{m}$.

2.5. Inégalité de Kolmogorov : Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de moyenne nulle ; on pose $\forall\, 1 \leq k \leq n$ $\ \mathsf{S}_k = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_k$ et $V_n = V(\mathsf{S}_n)$;

alors $\forall\, \varepsilon > 0$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\left\{ |\mathsf{S}_1| \vee |\mathsf{S}_2| \vee \ldots \vee |\mathsf{S}_n| \geq \varepsilon \right\} \leq \dfrac{V_n}{\varepsilon^2}}$.

Dém : Posons

$$\sigma = \Big\{ |\mathsf{S}_1| \vee |\mathsf{S}_2| \vee \ldots \vee |\mathsf{S}_n| \geq \varepsilon \Big\} = \big\{ |\mathsf{S}_1| \geq \varepsilon \big\} \vee \big\{ |\mathsf{S}_2| \geq \varepsilon \big\} \vee \ldots \vee \big\{ |\mathsf{S}_n| \geq \varepsilon \big\}$$

et $\sigma_k = \big\{ |\mathsf{S}_1| < \varepsilon \big\} \big\{ |\mathsf{S}_2| < \varepsilon \big\} \ldots \big\{ |\mathsf{S}_{k-1}| < \varepsilon \big\} \big\{ |\mathsf{S}_k| \geq \varepsilon \big\}$;

on a $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$ et $\forall\, i \neq j$ $\ \sigma_i\, \sigma_j = 0$, donc $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$.

De plus $\tilde{\mu}\,(\sigma_k\, \mathsf{S}_n^2) = \tilde{\mu}\left[\sigma_k\, (\mathsf{S}_k + \mathrm{f}_{k+1} + \ldots + \mathrm{f}_n)^2 \right]$

$= \tilde{\mu}\,(\sigma_k\, \mathsf{S}_k^2) + \tilde{\mu}\left[\sigma_k\, (\mathrm{f}_{k+1} + \ldots + \mathrm{f}_n)^2 \right] + 2\, \tilde{\mu}\left[\sigma_k\, \mathsf{S}_k\, (\mathrm{f}_{k+1} + \ldots + \mathrm{f}_n) \right]$

$= \tilde{\mu}\,(\sigma_k\, \mathsf{S}_k^2) + \tilde{\mu}\,(\sigma_k)\, \tilde{\mu}\left[(\mathrm{f}_{k+1} + \ldots + \mathrm{f}_n)^2 \right] + 2\, \tilde{\mu}\,(\sigma_k\, \mathsf{S}_k)\, \tilde{\mu}\,(\mathrm{f}_{k+1} + \ldots + \mathrm{f}_n)$

$= \tilde{\mu}\,(\sigma_k\, \mathsf{S}_k^2) + \tilde{\mu}\,(\sigma_k)\, \tilde{\mu}\left[(\mathrm{f}_{k+1} + \ldots + \mathrm{f}_n)^2 \right]$;

donc $\tilde{\mu}\,(\sigma_k\, \mathsf{S}_n^2) \geq \tilde{\mu}\,(\sigma_k\, \mathsf{S}_k^2) = \tilde{\mu}\Big[\sigma_k \left\{ |\mathsf{S}_k| \geq \varepsilon \right\} \mathsf{S}_k^2 \Big] \geq \varepsilon^2\, \tilde{\mu}\,(\sigma_k)$,

donc en sommant sur k $\ \tilde{\mu}\,(\mathsf{S}_n^2) \geq \tilde{\mu}\,(\sigma\, \mathsf{S}_n^2) \geq \varepsilon^2\, \tilde{\mu}\,(\sigma)$; donc $\tilde{\mu}\,(\sigma) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}\, \tilde{\mu}\,(\mathsf{S}_n^2) = \dfrac{V_n}{\varepsilon^2}$.

2.6. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ de v.a. indépendantes de <u>moyenne nulle</u>, telle que $\sum_{i=0}^{\infty} V(\mathrm{f}_i) < +\infty$; alors $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{f}_i$ converge p.p.

<u>Dém</u> :

Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n = \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \left\{ \left| \sum_{i=n}^{p} \mathrm{f}_i \right| > \varepsilon \right\} \leq \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \left\{ \operatorname*{Sup}_{n \leq r \leq p} \left| \sum_{i=n}^{r} \mathrm{f}_i \right| > \varepsilon \right\}$.

Posons $\forall\, p \geq n$ $\sigma_{n,p} = \left\{ \operatorname*{Sup}_{n \leq r \leq p} \left| \sum_{i=n}^{r} \mathrm{f}_i \right| > \varepsilon \right\}$; on a $\sigma_n \leq \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \sigma_{n,p}$;

de plus $\tilde{\mu}\,(\sigma_{n,p}) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n}^{p} V(\mathrm{f}_i) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n}^{\infty} V(\mathrm{f}_i)$.

Or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ la suite $\sigma_{n,p}$ est croissante, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\tilde{\mu}\,(\sigma_n) \leq \sup_{p \geq n} \tilde{\mu}\,(\sigma_{n,p}) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n}^{\infty} V(\mathrm{f}_i)$; donc $\tilde{\mu}\,(\sigma_n) \to 0$.

2.7. <u>Théorème</u> : Soient $\mathsf{F}, \mathsf{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ tels que $\mathsf{F}_n \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{F}$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i$; alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{F}}$.

<u>Dém</u> : En remplaçant F_n par $\mathsf{F}_n - \mathsf{F}$ on peut supposer $\mathsf{F} = 0$; soit $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$; alors on peut écrire $\forall\, n > p$

$$\operatorname*{Sup}_{q \geq n} \left\{ \frac{|\mathsf{S}_q|}{q} > \varepsilon \right\} \leq \operatorname*{Sup}_{q \geq n} \left\{ \frac{|\mathsf{S}_p|}{q} + \frac{1}{q} \left| \sum_{i=p+1}^{q} \mathsf{F}_i \right| > \varepsilon \right\}$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{q \geq n} \left\{ \frac{|\mathsf{S}_p|}{q} > \varepsilon/2 \right\} + \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \left\{ \frac{1}{q} \left| \sum_{i=p+1}^{q} \mathsf{F}_i \right| > \varepsilon/2 \right\}$$

$$\leq \left\{ \frac{|\mathsf{S}_p|}{n} > \varepsilon/2 \right\} + \operatorname*{Sup}_{q \geq n} \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=p+1}^{q} |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \right\}$$

$$\leq \left\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \right\} + \operatorname*{Sup}_{q \geq n} \left\{ \frac{q-p}{q} \sum_{i=p+1}^{q} |\mathsf{F}_i| > (q-p)\,\varepsilon/2 \right\}$$

$$\leq \left\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \right\} + \operatorname*{Sup}_{q \geq n} \operatorname*{Sup}_{p+1 \leq i \leq q} \left\{ \frac{q-p}{q} |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \right\}$$

$$\leq \left\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \right\} + \operatorname*{Sup}_{q \geq n} \operatorname*{Sup}_{p+1 \leq i \leq q} \left\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \right\}$$

$$= \left\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \right\} + \operatorname*{Sup}_{i \geq p+1} \left\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \right\}.$$

Comme $\operatorname*{Inf}_{n} \left\{ |\mathsf{S}_p| > n\,\varepsilon/2 \right\} = 0$, on en déduit

$\overline{\operatorname*{Lim}_{n}} \left\{ \dfrac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i \right| > \varepsilon \right\} \leq \operatorname*{Sup}_{i \geq p+1} \left\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \right\}$; de plus $\mathsf{F}_n \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{F}$, donc

$\overline{\operatorname*{Lim}_{n}} \left\{ \dfrac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i \right| > \varepsilon \right\} \leq \operatorname*{Inf}_{p} \operatorname*{Sup}_{i \geq p+1} \left\{ |\mathsf{F}_i| > \varepsilon/2 \right\} = \overline{\operatorname*{Lim}_{n}} \left\{ |\mathsf{F}_n| > \varepsilon/2 \right\} = 0$.

2.8. Théorème : Soit une suite $\mathsf{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{F}_i}{i}$ converge p.p. ; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i$; alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} 0}$.

Dém : Posons $\mathsf{T} = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{\mathsf{F}_i}{i} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathsf{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\mathsf{F}_i}{i}$; on peut écrire $\sum_{j=1}^{n} \mathsf{T}_j = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, \frac{\mathsf{F}_i}{i} = (n+1)\,\mathsf{T}_n - \mathsf{S}_n$, donc $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} = \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)\mathsf{T}_n - \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{T}_j$.
On a $\mathsf{T}_n \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{T}$, donc aussi $\dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{T}_j \overset{\text{pp}}{\to} \mathsf{T}$; on en déduit $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} 0$.

2.9. Loi forte des grands nombres II

Soit une suite de v.a. indépendantes $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ de moyenne $\widehat{m}$, telle que la suite $V(\mathrm{f}_n)$ soit **majorée** ; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$;
alors $\boxed{\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} \widehat{m}}$.

Dém : On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} V\Big(\frac{\mathrm{f}_i}{i}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V(\mathrm{f}_i)}{i^2} < +\infty$,
donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}_i - \widehat{m}}{i}$ converge p.p., donc $\dfrac{\mathsf{S}_n - n\,.\,\widehat{m}}{n} \overset{\text{pp}}{\to} 0$, c-à-d $\dfrac{\mathsf{S}_n}{n} \overset{\text{pp}}{\to} \widehat{m}$.

2.10. Inégalité de Bernstein : Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ des v.a. indépendantes de moyenne nulle ; on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, i\ \ |\mathrm{f}_i| \le M$;
on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$ et $V_n = V(\mathsf{S}_n)$; alors $\forall\, \lambda > 0$ on a

$$\boxed{\tilde{\mu}\big\{\mathsf{S}_n \ge \lambda\big\} \le \exp\Big[-\frac{V_n}{M^2}\,\Theta\Big(\frac{\lambda M}{V_n}\Big)\Big]} \quad \text{avec } \forall\, x \ge 0 \quad \boxed{\Theta(x) = (1+x)\ln(1+x) - x}.$$

Dém : D'après l'inégalité de Markov on a $\forall\, t > 0$

$$\tilde{\mu}\big\{\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n \ge \lambda\big\} = \tilde{\mu}\Big\{e^{\,t\left(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n - \lambda\right)} \ge 1\Big\}$$
$$\le \tilde{\mu}\Big[e^{\,t\left(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n - \lambda\right)}\Big] \le e^{-t\lambda}\,\tilde{\mu}\Big[\prod_i e^{\,t\,\mathrm{f}_i}\Big] = e^{-t\lambda} \prod_i \tilde{\mu}\big(e^{\,t\,\mathrm{f}_i}\big)$$
$$= \exp\Big(-t\lambda + \sum_i \ln\big[\tilde{\mu}\big(e^{\,t\,\mathrm{f}_i}\big)\big]\Big).$$

On pose $\forall\, x > 0\ \ \Phi(x) = \dfrac{1}{x^2}\big(e^{\,x} - x - 1\big)$; grâce au développement en série de Taylor de $e^{\,x}$ il est clair que la fonction Φ est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit $\forall\, 1 \le i \le n$:

$$\ln\big[\,\tilde\mu\big(e^{\,t\,\mathrm{f}_i}\big)\big] = \ln\big[\,\tilde\mu\big(e^{\,t\,\mathrm{f}_i} - t\,\mathrm{f}_i - 1 + t\,\mathrm{f}_i + 1\big)\big] = \ln\big[\,\tilde\mu\big(e^{\,t\,\mathrm{f}_i} - t\,\mathrm{f}_i - 1\big) + 1\big]$$

$$= \ln\Big(1 + \tilde\mu\,\big[t^2\,\mathrm{f}_i^2\,\Phi\big(t\,\mathrm{f}_i\big)\big]\Big) \le \ln\big[1 + t^2\,V(\mathrm{f}_i)\,\Phi\big(t\,M\big)\big] \le t^2\,V(\mathrm{f}_i)\,\Phi(t\,M)\,,$$

donc $\tilde\mu\big\{\mathsf{S}_n \ge \lambda\big\} \le \exp\big[-t\,\lambda + t^2\,V_n\,\Phi(t\,M)\big]$.

On pose $H(t) = -\,t\,\lambda + t^2\,V_n\,\Phi(t\,M) = -\,t\,\lambda + \dfrac{V_n}{M^2}\big(e^{\,t\,M} - t\,M - 1\big)$;

on choisit $t > 0$ tel que $H(t)$ soit minimal ; t doit donc vérifier l'équation

$H'(t) = -\lambda + \dfrac{V_n}{M^2}\big(M\,e^{\,t\,M} - M\big) = 0$, c-à-d $-\lambda + \dfrac{V_n}{M}\big(e^{\,t\,M} - 1\big) = 0$, c-à-d

$t = \dfrac{1}{M}\ln\big(1 + \dfrac{\lambda\,M}{V_n}\big) = t_*$; on trouve bien $H(t_*) = -\,\dfrac{V_n}{M^2}\,\Theta\Big(\dfrac{\lambda\,M}{V_n}\Big)$.

2.11.* <u>Corollaire 1</u> : Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ des v.a. indépendantes de moyenne nulle et de variance V ; on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$ $|\mathrm{f}_i| \le M$; on pose $\mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$; alors $\forall\, \varepsilon > 0$ on a

$$\boxed{\tilde\mu\Big\{\frac{\mathsf{S}_n}{n} \ge \varepsilon\Big\} \le \exp\Big[-\,\frac{n\,V}{M^2}\,\Theta\Big(\frac{\varepsilon\,M}{V}\Big)\Big]}\,.$$

2.12. <u>Corollaire 2</u> : Sous les mêmes hypothèses qu'au Corollaire 1 on a

$$\boxed{\tilde\mu\Big\{\frac{\mathsf{S}_n}{n} \ge \varepsilon\Big\} \le \exp\Big[-\,\frac{n\,\varepsilon^2}{2\,V}\Big(1 - \frac{\varepsilon\,M}{3\,V}\Big)\Big]}\,.$$

<u>Dém</u> : On montre facilement que $\forall\, x \ge 0$ $\Theta(x) \ge \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$, d'où le résultat.

2.13.* <u>Corollaire 3</u> : Soient $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ des v.a. indépendantes de moyenne $\widehat{m}$ et de variance V ; on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$ $|\mathrm{f}_i - \widehat{m}| \le M$; on pose $\mathsf{S}_n = \mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots + \mathrm{f}_n$; alors $\forall\, \varepsilon > 0$ on a

$$\boxed{\tilde\mu\Big\{\Big|\,\frac{\mathsf{S}_n}{n} - \widehat{m}\Big| \ge \varepsilon\Big\} \le 2\,\exp\Big[-\,\frac{n\,\varepsilon^2}{2\,V}\Big(1 - \frac{\varepsilon\,M}{3\,V}\Big)\Big]}\,.$$

Il est possible de donner une interprétation fini-dimensionnelle de la loi forte des grands nombres (LFGN). Bien que cette version ne procure ni le frisson esthétique ni la transe extatique du "presque partout", elle permet de "toucher du doigt" les objets mathématiques mis en oeuvre et de donner à cette loi un contenu plus explicite en la dépouillant de son habit de cérémonie traditionnel.

Dans un premier temps nous remplaçns avantageusement et sans perte de généralité la suite de variables aléatoires indépendantes par une suite de distributions $\tilde{\mu}_n$ sur $\mathbb{R}$ comme nous y invite l'Exemple I (p. 260). Ensuite nous munissons les espaces $\mathbb{R}^j$ de la probabilité $\boxed{\widetilde{P}_j = \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2 \otimes \ldots \otimes \tilde{\mu}_j}$. C'est sur de tels espaces que nous calculerons toutes les intégrales dont nous aurons besoin pour énoncer la LFGN.

De plus les ensembles (événements) dont nous calculons les mesures (probabilités) sont des **ouverts** de $\mathbb{R}^j$, ce qui constitue une simplification conceptuelle considérable car point n'est besoin d'une "théorie de la mesure" (la nôtre ou une autre) pour calculer ces mesures. En effet la mesure $\widetilde{P}_j$ d'un hyper-cube coordonné est donnée par le produit des mesures de ses côtés et celle d'une réunion disjointe d'hyper-cubes coordonnés s'en déduit par somme. La mesure d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^j$ se définit dès lors simplement par $\widetilde{P}_j(U) = \sup \{\widetilde{P}_j(S) \,\|\, S = \text{réunion disjointe d'hyper-cubes coordonnés} \subset U\}$
Par ailleurs les ouverts dont nous calculerons les probabilités sont eux-mêmes parmi les plus simples qu'on puisse rencontrer puisque ce sont des intersections finies de demi-espaces ouverts de $\mathbb{R}^j$.

Voilà dès lors la description "down to earth" de la LFGN :

$\forall\ n, p, \ell \in \mathbb{N}^*$ tels que $\boxed{n \le \ell \le n+p}$ on pose

$$A_{np\ell} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}) \in \mathbb{R}^{n+p} \,\Big\|\, \left| \widehat{m} - \frac{1}{\ell} \sum_{r=1}^{\ell} x_r \right| < \varepsilon \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}) \in \mathbb{R}^{n+p} \,\Big\|\, \frac{1}{\ell} \sum_{r=1}^{\ell} x_r < \widehat{m} + \varepsilon \right\}$$

$$\bigcap \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}) \in \mathbb{R}^{n+p} \,\Big\|\, \frac{1}{\ell} \sum_{r=1}^{\ell} x_r > \widehat{m} - \varepsilon \right\}$$

$A_{np\ell}$ est donc l'intersection de deux demi-espaces ouverts de $\mathbb{R}^{n+p}$ de frontières parallèles.

On pose ensuite $A_{n,p} = \bigcap_{\ell=n}^{n+p} A_{np\ell}$ qui est donc une <u>intersection finie de demi-espaces ouverts</u> de $\mathbb{R}^{n+p}$, donc encore un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$.

L'événement $A_{n,p}$ est l'ensemble des vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ tels que les $p+1$ moyennes arithmétiques $\frac{1}{\ell} \sum_{r=1}^{\ell} x_r$ $\boxed{n \le \ell \le n+p}$ vérifient $\left| \widehat{m} - \frac{1}{\ell} \sum_{r=1}^{\ell} x_r \right| \le \varepsilon$

La probabilité de l'événement $A_{n,p}$ est $\widetilde{P}_{n+p}(A_{n,p})$.

On a $\widetilde{P}_{n+p}(A_{n,p}) = \widetilde{P}_{n+p+1}(A_{n,p} \oplus \mathbb{R})$;

on a aussi clairement $A_{n,p} \oplus \mathbb{R} \supset A_{n,p+1}$, donc $\widetilde{P}_{n+p}(A_{n,p}) \geq \widetilde{P}_{n+p+1}(A_{n,p+1})$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite $p \mapsto \widetilde{P}_{n+p}(A_{n,p})$ est donc décroissante et on pose $\boxed{v_n = \inf_p \widetilde{P}_{n+p}(A_{n,p})}$

v_N est donc la probabilité qu'une suite $x_n \in \mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{\forall\, n \geq N \quad \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} x_r \in \,]\widehat{m} - \varepsilon, \widehat{m} + \varepsilon[}\,.$$

D'autre part on a trivialement $\forall\, n \geq 2 \;\; A_{n,p} \supset A_{n-1,p+1}$,

donc $\widetilde{P}_{n+p}(A_{n,p}) \geq \widetilde{P}_{n+p}(A_{n-1,p+1}) = \widetilde{P}_{(n-1)+(p+1)}(A_{n-1,p+1})$, donc $v_n \geq v_{n-1}$;

la suite v_n est donc croissante ; la loi des grands nombres affirme que $\boxed{\sup_N v_N = 1}$,

c-à-d $\boxed{\sup_n \inf_p \widetilde{P}_{n+p}(A_{n,p}) = 1}$.

Ce résultat signifie exactement que pour tout $\delta > 0$, aussi proche que l'on veut de 0, il existe N tel que $v_N > 1 - \delta$, autrement dit tel que la probabilité de l'événement $\left[\forall\, n \geq N \quad \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} x_r \in \,]\widehat{m} - \varepsilon, \widehat{m} + \varepsilon[\right]$ soit supérieure à $1 - \delta$.