TROISIEME PARTIE

Intégration sur un rectangle compact de $\mathbb{R}^2$

CHAPITRE XV

FONCTIONS ET PSEUDO-MESURES SUR UN RECTANGLE COMPACT

On généralise à grands traits pour deux dimensions les résultats obtenus sur [a,b]. Le *produit tensoriel* de deux pseudo-mesures unidimensionnelles constitue la principale nouveauté de ce chapitre, qui nous conduit à l'apothéose du théorème de Fubini.

§ 1. Espaces fondamentaux

I et J sont des intervalles compacts de longueur non nulle de $\mathbb{R}$; on pose $\mathrm{K} = \mathrm{I} \times \mathrm{J}$.

1.1. Définition : Une fonction étagée dans K est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbb{1}_{\mathrm{I}' \times \mathrm{J}'}$, où I' et J' sont des intervalles inclus respectivement à I et J, (éventuellement réduits à des singletons).

Notations :

$\mathcal{E}(\mathrm{K}) =$ algèbre de Riesz des fonctions étagées : $\mathrm{K} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{C}(\mathrm{K}) =$ algèbre de Riesz des fonctions continues : $\mathrm{K} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F}(\mathrm{K}) =$ algèbre de Riesz des fonctions bornées : $\mathrm{K} \to \mathbb{R}$

1.2. Définition : On note $\mathcal{R}(\mathrm{K})$ la fermeture de $\mathcal{E}(\mathrm{K})$ dans $\mathcal{F}(\mathrm{K})$ pour la convergence uniforme. Les fonctions de $\mathcal{R}(\mathrm{K})$ sont appelées les fonctions réglées dans K.

1.3.* Théorème : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{K})$; alors $f \in \mathcal{R}(\mathrm{K})$ ssi $\forall (u, v) \in \mathrm{K}$ les *huit* limites suivantes existent :

$$\boxed{\begin{array}{cccc}
\lim\limits_{x \to u^+} f(x, v) & \lim\limits_{x \to u^-} f(x, v) & \lim\limits_{y \to v^+} f(u, y) & \lim\limits_{y \to v^+} f(u, y) \\[2ex]
\lim\limits_{\substack{x \to u^+ \\ y \to v^+}} f(x, y) & \lim\limits_{\substack{x \to u^- \\ y \to v^+}} f(x, y) & \lim\limits_{\substack{x \to u^+ \\ y \to v^-}} f(x, y) & \lim\limits_{\substack{x \to u^- \\ y \to v^-}} f(x, y)
\end{array}}$$

Si on trace un carré de centre $P = (u\,, v)$ et de côtés parallèles aux axes, ainsi que ses deux médianes, les limites ci-dessus correspondent aux limites en P sur les quatre demi-médianes et aux limites en P dans les quatres carrés *ouverts* délimités par les médianes.

On définit $\mathcal{PM}(\mathrm{K})$, $\mathcal{L}^1(\mathrm{K})$, $\mathcal{L}^2(\mathrm{K})$, $\mathcal{B}(\mathrm{K})$, $\mathcal{BA}(\mathrm{K})$, $\mathcal{PR}(\mathrm{K})$, $\mathcal{W}(\mathrm{K})$ comme sur [a,b]. Les définitions et théorèmes relatifs à ces espaces sont analogues au cas de [a,b].

<u>*Notation intégrale*</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathrm{K}) \quad \forall\, g \in \mathcal{R}(\mathrm{K})$ on note

$$\boxed{\tilde{f}(g) = \iint_{\mathrm{K}} g\,\tilde{f} = \iint_{\mathrm{K}} g\,(x,\, y)\ \tilde{f}\,(x,\, y)}\,.$$

$\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K})$ on écrit $\displaystyle\iint_{\mathrm{K}} \tilde{f}\,(x,\, y)\; dx\; dy$ au lieu de $\displaystyle\iint_{\mathrm{K}} \tilde{f}\,(x,\, y)$; on a donc

$$\boxed{\iint_{\mathrm{K}} \tilde{f}\,(x,\, y)\; dx\; dy = \iint_{\mathrm{K}} \tilde{f}\,(x,\, y) = \tilde{f}\,(\mathbb{1}) \quad (\text{avec } \mathbb{1} = 1_{\mathrm{K}})}\,.$$

1.4. <u>Définition</u> : $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})$ est une <u>mesure</u> sur K ssi

$$\boxed{\forall\, u \in \mathrm{I} \quad \lim_{\alpha \to u^{\pm}} |\tilde{f}|\,\big(1_{]\,u\,,\,\alpha\,[\,\times\,\mathrm{J}}\big) = 0 \qquad \underline{\text{et}} \qquad \forall\, v \in \mathrm{J} \quad \lim_{\beta \to v^{\pm}} |\tilde{f}|\,\big(1_{\mathrm{I}\,\times\,]\,v\,,\,\beta\,[}\big) = 0}\ .$$

Cette propriété s'appelle l'<u>hypercontinuité</u> des mesures ; elle signifie que si, dans un rectangle *ouvert* de côtés parallèles aux axes, un côté tend vers le côté opposé, alors la mesure du rectangle tend vers 0.

On note $\mathcal{M}(\mathrm{K})$ l'espace de Riesz des mesures sur K.

La mesure $\mathcal{E}(\mathrm{K}) \to \mathrm{I\!R}$: $g \mapsto \displaystyle\iint_{\mathrm{K}} g\,(x,\, y)\; dx\; dy$ est la <u>mesure de Lebesgue</u> sur K.

1.5.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{L}^1(\mathrm{K}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{K}) \subset \mathcal{PM}(\mathrm{K})}$.

1.6.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{M}(\mathrm{K})$ est un sous-espace cohérent, $\boxed{\text{intégral}}$ et <u>fermé</u> de $\mathcal{PM}(\mathrm{K})$.

1.7. <u>Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}(\mathrm{K})$</u>

Soit $f \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathrm{K})$ on a $f_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\,\tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) \to \tilde{\mu}\,(f)$

<u>Dém</u> : Même succession d'étapes que pour [a,b].

1.8. Corollaire : Hypercontinuité généralisée

Soit une suite décroissante d'ouverts $\Omega_n \subset \mathrm{K}$ tels que $\bigcap_n \Omega_n = \emptyset$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathrm{K})$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\left(\mathbb{1}_{\Omega_n}\right) \to 0}$.

Dém : On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{1}_{\Omega_n} \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$; de plus on a clairement $\mathbb{1}_{\Omega_n} \overset{\mathrm{b}}{\to} 0$; il suffit dès lors d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Remarque : Il n'existe pas de généralisation naturelle de la notion de mesure *diffuse* en dimension ≥ 2.

§ 2. Produit tensoriel de fonctions

2.1. Définition : $\forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}) \quad \forall g \in \mathcal{F}(\mathrm{J})$ on note

$\boxed{f \otimes g \ : \ \mathrm{K} \to \mathbb{R} \ : \ (x, y) \mapsto f(x)\, g(y)}$; on a donc $\boxed{f \otimes g \in \mathcal{F}(\mathrm{K})}$.

2.2.* Théorème : $\boxed{|f \otimes g| = |f| \otimes |g|}$ et $\boxed{\|f \otimes g\| = \|f\|\,\|g\|}$.

2.3.* Théorème : On a $\forall f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathrm{I}) \quad \forall g, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(\mathrm{J})$

1) $f_1 \otimes g + f_2 \otimes g = (f_1 + f_2) \otimes g$

2) $f \otimes g_1 + f \otimes g_2 = f \otimes (g_1 + g_2)$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g) = \lambda (f \otimes g)$

4) $(f_1 \otimes g_1)(f_2 \otimes g_2) = (f_1 f_2) \otimes (g_1 g_2)$.

Notation : Soient V un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathrm{I})$ et W un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathrm{J})$; on note $\boxed{\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathrm{K})$ engendré par les éléments de la forme $f \otimes g$ avec $f \in \mathrm{V}$ et $g \in \mathrm{W}$; on peut donc écrire $\boxed{\mathcal{F}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{F}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{F}(\mathrm{K})}$.

2.4.* Théorème : $\boxed{\mathcal{E}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{E}(\mathrm{J}) = \mathcal{E}(\mathrm{K})}$.

Cette propriété, à contraster avec la suivante, fournit une raison supplémentaire de bâtir la théorie de l'intégration sur les fonctions étagées plutôt que sur les fonctions continues.

2.5.* Théorème : $\mathcal{C}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{C}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{C}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{R}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{R}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{K})$.

2.6.* Théorème : $\mathcal{BA}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{BA}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{BA}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{PR}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{PR}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{PR}(\mathrm{K})$.

§ 3. Pseudo-mesures marginales

3.1. Définition : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})$ on pose

$$\int_{\mathrm{J}} \tilde f \;:\; \mathcal{E}(\mathrm{I}) \to \mathbb{R} \;:\; h \mapsto \tilde f\,(h \otimes 1_{\mathrm{J}}) = \iint_{\mathrm{K}} h(x)\, \tilde f(x\,,\,y)$$

$$\text{et} \quad \int_{\mathrm{I}} \tilde f \;:\; \mathcal{E}(\mathrm{J}) \to \mathbb{R} \;:\; h \mapsto \tilde f\,(1_{\mathrm{I}} \otimes h) = \iint_{\mathrm{K}} h(y)\, \tilde f(x\,,\,y)\,.$$

3.2. Théorème :

$$\int_{\mathrm{J}} \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}) \;\text{ et }\; \int_{\mathrm{I}} \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})\,;\;\text{de plus}\; \Big\| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big\|_\star \le \|\tilde f\|_\star \;\text{ et }\; \Big\| \int_{\mathrm{I}} \tilde f \Big\|_\star \le \|\tilde f\|_\star\,.$$

Dém :

On a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ $\Big| \Big(\int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big)(h) \Big| = \big| \tilde f\,(h \otimes 1_{\mathrm{J}}) \big| \le \|\tilde f\|_\star \, \big\| |h| \otimes 1_{\mathrm{J}} \big\| = \|\tilde f\|_\star \, \|h\|\,.$

$\int_{\mathrm{J}} \tilde f$ et $\int_{\mathrm{I}} \tilde f$ s'appellent les pseudo-mesures marginales de $\tilde f$, respectivement sur I et J.

3.3. Corollaire :

Soient $\tilde f_n\,,\, \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})$ tels que $\tilde f_n \overset{\star}{\to} \tilde f$; alors $\int_{\mathrm{J}} \tilde f_n \overset{\star}{\to} \int_{\mathrm{J}} \tilde f$ et $\int_{\mathrm{I}} \tilde f_n \overset{\star}{\to} \int_{\mathrm{I}} \tilde f$.

3.4. Lemme :

$\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I})^+$ $\Big| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big|(h) \le |\tilde f|\,(h \otimes 1_{\mathrm{J}})$ et $\forall\, k \in \mathcal{E}(\mathrm{J})^+$ $\Big| \int_{\mathrm{I}} \tilde f \Big|(k) \le |\tilde f|\,(1_{\mathrm{I}} \otimes k)$.

Dém :
$$\Big| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big|(h) = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \\ |k| \le h}} \Big| \Big(\int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big)(k) \Big| = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \\ |k| \le h}} \big| \tilde f\,(k \otimes 1_{\mathrm{J}}) \big|$$
$$\le \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \\ |k| \le h}} |\tilde f|\,\big(|k| \otimes 1_{\mathrm{J}}\big) = |\tilde f|\,(h \otimes 1_{\mathrm{J}})\,.$$

3.5. Théorème : $\boxed{\tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{K}) \Rightarrow \Big[\int_{\mathrm{J}} \tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{I}) \;\text{ et }\; \int_{\mathrm{I}} \tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{J}) \Big]}$.

Dém : On a $\forall\, u \in \mathrm{I}$

$$\Big| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big| \big(1_{]u,\alpha[}\big) \le |\tilde f|\,\big(1_{]u,\alpha[} \otimes 1_{\mathrm{J}}\big) = |\tilde f|\,\big(1_{]u,\alpha[\times \mathrm{J}}\big) \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to u^{\pm}.$$

Notation : Si $\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K})$ on notera les mesures marginales $\int_{\mathrm{J}} \tilde f\, dy$ et $\int_{\mathrm{I}} \tilde f\, dx$; compte tenu du théorème suivant nous les appelerons fonctionnelles marginales , respectivement sur I et J.

3.6. <u>Théorème</u> : $\boxed{\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K}) \Rightarrow \Big[\int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}) \ \text{ et } \ \int_{\mathrm{I}} \tilde f \, dx \in \mathcal{L}^1(\mathrm{J}) \Big]}$.

<u>Dém</u> : Il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ et une suite $\varepsilon_n > 0$ telles que $\varepsilon_n \to 0$ et telles que $\forall g \in \mathcal{E}(\mathrm{K}) \ \left| \tilde f(g) - \iint_{\mathrm{K}} f_n(x,y)\, g(x,y)\, dx\, dy \right| \leq \varepsilon_n \, \|g\|$;

donc $\forall h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \ \left| \tilde f(h \otimes 1_{\mathrm{J}}) - \iint_{\mathrm{K}} f_n(x,y)\, h(x)\, dx\, dy \right| \leq \varepsilon_n \, \|h \otimes 1_{\mathrm{J}}\|$,

c-à-d $\left| \Big(\int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \Big)(h) - \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f_n(x,y)\, dy \Big] h(x)\, dx \right| \leq \varepsilon_n \, \|h\|$;

or $\forall n \in \mathbb{N} \ \int_{\mathrm{J}} f_n \, dy \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$, donc $\int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$.

3.7. <u>Théorème</u> : $\boxed{\tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathrm{K}) \Rightarrow \Big[\int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}) \ \text{ et } \ \int_{\mathrm{I}} \tilde f \, dx \in \mathcal{L}^2(\mathrm{J}) \Big]}$;

de plus $\Big\| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \Big\|_2 \leq |\mathrm{J}|^{1/2} \, \|\tilde f\|_2$ <u>et</u> $\Big\| \int_{\mathrm{I}} \tilde f \, dx \Big\|_2 \leq |\mathrm{I}|^{1/2} \, \|\tilde f\|_2$.

<u>Dém</u> : On a $\forall h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \ \left| \Big(\int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big)(h) \right| = |\tilde f(h \otimes 1_{\mathrm{J}})| \leq \|\tilde f\|_2 \, \|h \otimes 1_{\mathrm{J}}\|_2$

$= \|\tilde f\|_2 \, |\mathrm{J}|^{1/2} \, \|h\|_2$; donc $\int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I})$ et $\Big\| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \Big\|_2 \leq |\mathrm{J}|^{1/2} \, \|\tilde f\|_2$.

3.8. <u>Théorème</u> : $\boxed{\tilde f \in \mathcal{B}(\mathrm{K}) \Rightarrow \Big[\int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \in \mathcal{B}(\mathrm{I}) \ \text{ et } \ \int_{\mathrm{I}} \tilde f \, dx \in \mathcal{B}(\mathrm{J}) \Big]}$;

de plus $\Big\| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \Big\|_{\mathrm{B}} \leq |\mathrm{J}| \, \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}$ et $\Big\| \int_{\mathrm{I}} \tilde f \, dx \Big\|_{\mathrm{B}} \leq |\mathrm{I}| \, \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \ \left| \Big(\int_{\mathrm{J}} \tilde f \Big)(h) \right| = |\tilde f(h \otimes 1_{\mathrm{J}})| \leq \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, \|h \otimes 1_{\mathrm{J}}\|_1$

$= b \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \, |\mathrm{J}| \, \|h\|_1$; donc $\int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \in \mathcal{B}(\mathrm{I})$ et $\Big\| \int_{\mathrm{J}} \tilde f \, dy \Big\|_{\mathrm{B}} \leq |\mathrm{J}| \, \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}$.

3.9. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{W}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{W}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{W}(\mathrm{K})}$.

<u>Dém</u> :

Soient $f_1 \in \mathcal{W}(\mathrm{I})^+$ et $f_2 \in \mathcal{W}(\mathrm{J})^+$; soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_1 \leq M$ et $f_2 \leq M$; soient $\varepsilon > 0$ et $\tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{K})^+$; soient $g_1, h_1 \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$ tels que $0 \leq g_1 \leq f_1 \leq h_1 \leq M$ et $\Big(\int_{\mathrm{J}} \tilde\mu \Big)(h_1 - g_1) \leq \varepsilon$; de même soient $g_2, h_2 \in \mathcal{PR}(\mathrm{J})$ tels que $0 \leq g_2 \leq f_2 \leq h_2 \leq M$ et $\Big(\int_{\mathrm{I}} \tilde\mu \Big)(h_2 - g_2) \leq \varepsilon$; alors on a

$g_1 \otimes g_2 \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$, $h_1 \otimes h_2 \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$ et $g_1 \otimes g_2 \leq f_1 \otimes f_2 \leq h_1 \otimes h_2$;

de plus on peut écrire

$$\tilde{\mu}\big(h_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes g_2\big) = \tilde{\mu}\big(h_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes h_2 + g_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes g_2\big)$$
$$= \tilde{\mu}\big[(h_1 - g_1) \otimes h_2 + g_1 \otimes (h_2 - g_2)\big] \leq \tilde{\mu}\big[(h_1 - g_1) \otimes M + M \otimes (h_2 - g_2)\big]$$
$$\leq M\Big[\Big(\int_{\mathrm{J}} \tilde{\mu}\Big)(h_1 - g_1) + \Big(\int_{\mathrm{I}} \tilde{\mu}\Big)(h_2 - g_2)\Big] \leq 2\,\varepsilon\, M \;;\; \text{donc } \; f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{W}(\mathrm{K})\,.$$

Le cas général s'obtient en raisonnant sur les parties positives et négatives de f_1 et f_2.

§ 4. Produit tensoriel de pseudo-mesures

4.1. Définition : On pose $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{J}) \quad \forall\, f \in \mathcal{E}(\mathrm{I}) \quad \forall\, g \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$

$$\boxed{(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})\,(f \otimes g) = \tilde{\mu}(f)\,\tilde{\nu}(g)}\,.$$

Comme $\mathcal{E}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{E}(\mathrm{J}) = \mathcal{E}(\mathrm{K})$, cette relation permet par linéarité de faire agir $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}$ sur $\mathcal{E}(\mathrm{K})$; on en conclut immédiatement que l'on a $\boxed{\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})}$.

Notation : Soient V un sous-espace de $\mathcal{PM}(\mathrm{I})$ et W un sous-espace de $\mathcal{PM}(\mathrm{J})$; on note $\boxed{\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{PM}(\mathrm{K})$ engendré par les éléments de la forme $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}$ avec $\tilde{\mu} \in \mathrm{V}$ et $\tilde{\nu} \in \mathrm{W}$.

On peut donc écrire $\boxed{\mathcal{PM}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{PM}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{PM}(\mathrm{K})}$.

4.2.* Théorème : On a $\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})$

1) $\tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\nu} + \tilde{\mu}_2 \otimes \tilde{\nu} = (\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2) \otimes \tilde{\nu}$

2) $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}_1 + \tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}_2 = \tilde{\mu} \otimes (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)$

3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda\, \tilde{\mu}) \otimes \tilde{\nu} = f \otimes (\lambda\, \tilde{\nu}) = \lambda\,(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})$.

4.3.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{I})^+ \quad \forall\, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2 \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})^+$ on a

$$\boxed{\big(\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \;\text{ et }\; \tilde{\nu}_1 \leq \tilde{\nu}_2\big) \Rightarrow \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\nu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \otimes \tilde{\nu}_2}\,.$$

4.4. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}| \quad \text{et} \quad \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star\, \|\tilde{\nu}\|_\star}\,.$$

<u>Dém</u> : Toute fonction $h \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ peut s'écrire $h = \sum_{ij} \alpha_{ij}\, p_i\, q_j$ où p_i est la fonction caractéristique d'un intervalle $\subset \mathrm{I}$ et où q_j est la fonction caractéristique d'un intervalle $\subset \mathrm{J}$; on peut supposer de plus $\forall\, i \neq j \quad p_i\, p_j = 0$ et $q_i\, q_j = 0$; on a dès lors :

$\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{K}) \quad \big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h)\big| = \big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})\big(\sum_{ij} \alpha_{ij}\, p_i\, q_j\big)\big| = \big|\sum_{ij} \alpha_{ij}\, \tilde{\mu}(p_i)\, \tilde{\nu}(q_j)\big|$

$\leq \sum_{ij} |\alpha_{ij}|\, \big|\tilde{\mu}(p_i)\big|\, \big|\tilde{\nu}(q_j)\big| \leq \sum_{ij} |\alpha_{ij}|\, |\tilde{\mu}|(p_i)\, |\tilde{\nu}|(q_j) = \big(|\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|\big)\big(|h|\big)$;

on en déduit $|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| \leq |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|$.

Par ailleurs soit $\varepsilon > 0$; soit $p \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $\|p\| \leq 1$ et $\|\tilde{\mu}\|_\star \leq \tilde{\mu}(p) + \varepsilon$;

de même soit $q \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $\|p\| \leq 1$ et $\|\tilde{\nu}\|_\star \leq \tilde{\mu}(q) + \varepsilon$; on a $\|p\, q\| \leq 1$,

donc $\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star \geq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(p \otimes q) = \tilde{\mu}(p)\, \tilde{\nu}(q) \geq \big(\|\tilde{\mu}\|_\star - \varepsilon\big)\big(\|\tilde{\nu}\|_\star - \varepsilon\big)$

$\geq \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star - \varepsilon\big(\|\tilde{\mu}\|_\star + \|\tilde{\nu}\|_\star\big)$; comme ε est arbitraire on obtient

$\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star \geq \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star$.

Posons $\widetilde{\chi} = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}| - |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| \in \mathcal{PM}(\mathrm{K})^+$; on a donc $\|\widetilde{\chi}\|_\star = \widetilde{\chi}(\mathbb{1}_\mathrm{I} \otimes \mathbb{1}_\mathrm{J})$

$= (|\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|)(\mathbb{1}_\mathrm{I} \otimes \mathbb{1}_\mathrm{J}) - |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}|(\mathbb{1}_\mathrm{I} \otimes \mathbb{1}_\mathrm{J}) = |\tilde{\mu}|(\mathbb{1}_\mathrm{I})\, |\tilde{\nu}|(\mathbb{1}_\mathrm{J}) - \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star$

$= \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star - \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star \leq 0$; donc $\|\widetilde{\chi}\|_\star = 0$, c-à-d $\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_\star = \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star$,

et donc aussi $\widetilde{\chi} = 0$, c-à-d $|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|$.

4.5. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{M}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{M}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{K})}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, u \in \mathrm{I} \quad \lim_{\alpha \to u^\pm} \big|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\big|\big(1_{]u,\alpha[\times \mathrm{J}}\big) = \lim_{\alpha \to u^\pm} \big(|\tilde{f}| \otimes |\tilde{g}|\big)\big(1_{]u,\alpha[} \otimes 1_\mathrm{J}\big)$

$= \lim_{\alpha \to u^\pm} \big|\tilde{f}\big|(1_{]u,\alpha[})\, |\tilde{g}|(1_\mathrm{J}) = 0$.

4.6. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{L}^1(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{L}^1(\mathrm{J}) \subset \mathcal{L}^1(\mathrm{K})}$ et $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{\big\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\big\|_1 = \big\|\tilde{f}\big\|_1 \|\tilde{g}\|_1}.$$

<u>Dém</u> : Soit $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $f_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$ et $g_n \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $g_n \xrightarrow{1} \tilde{g}$;

alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big\|\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n - \tilde{f} \otimes \tilde{g}\big\|_\star = \big\|\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n - \tilde{f}_n \otimes \tilde{g} + \tilde{f}_n \otimes \tilde{g} - \tilde{f} \otimes \tilde{g}\big\|_\star$

$\leq \big\|\tilde{f}_n \otimes (\tilde{g}_n - \tilde{g})\big\|_\star + \big\|(\tilde{f}_n - \tilde{f}) \otimes \tilde{g}\big\|_\star = \big\|\tilde{f}_n\big\|_1 \big\|\tilde{g}_n - \tilde{g}\big\|_1 + \big\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\big\|_1 \|\tilde{g}\|_1$;

donc $\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \otimes \tilde{g}$ et $\tilde{f} \otimes \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K})$.

4.7. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{L}^2(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{L}^2(\mathrm{J}) \subset \mathcal{L}^2(\mathrm{K})}$ et $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}) \quad \forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{\big\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\big\|_2 = \big\|\tilde{f}\big\|_2 \|\tilde{g}\|_2}.$$

Dém : Soit $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $f_n \xrightarrow{2} \tilde f$ et $g_n \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $g_n \xrightarrow{2} \tilde g$;
on sait déjà que $\tilde f_n \otimes \tilde g_n \xrightarrow{1} \tilde f \otimes \tilde g \in \mathcal{L}^1(\mathrm{K})$; de plus on a $\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde f_m \otimes \tilde g_m - \tilde f_n \otimes \tilde g_n\|_2 = \|\tilde f_m \otimes \tilde g_m - \tilde f_m \otimes \tilde g_n + \tilde f_m \otimes \tilde g_n - \tilde f_n \otimes \tilde g_n\|_2$$

$$\le \|\tilde f_m \otimes (\tilde g_m - \tilde g_n)\|_2 + \|(\tilde f_m - \tilde f_n) \otimes \tilde g_n\|_2 = \|\tilde f_m^2 \otimes (\tilde g_m - \tilde g_n)^2\|_1 + \|(\tilde f_m - \tilde f_n)^2 \otimes \tilde g_n^2\|_1$$

$$= \|\tilde f_m^2\|_1 \|(\tilde g_m - \tilde g_n)^2\|_1 + \|(\tilde f_m - \tilde f_n)^2\|_1 \|\tilde g_n^2\|_1$$

$$= \|\tilde f_m\|_2^2 \|\tilde g_m - \tilde g_n\|_2^2 + \|\tilde f_m - \tilde f_n\|_2^2 \|\tilde g_n\|_2^2 \ ;$$

donc $\tilde f_n \otimes \tilde g_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{K})$, donc $\tilde f_n \otimes \tilde g_n \xrightarrow{2} \tilde f \otimes \tilde g \in \mathcal{L}^2(\mathrm{K})$;
par ailleurs on a $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_2 = \|\tilde f^2 \otimes \tilde g^2\|_1 = \|\tilde f^2\|_1 \|\tilde g^2\|_1 = \|\tilde f\|_2 \|\tilde g\|_2$.

4.8.* Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I})$ $\forall\, \tilde h, \tilde k \in \mathcal{L}^2(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{(\tilde f \otimes \tilde g)(\tilde h \otimes \tilde k) = (\tilde f \tilde h) \otimes (\tilde g \tilde k)}\,.$$

4.9. Théorème : $\boxed{\mathcal{B}(\mathrm{I}) \otimes \mathcal{B}(\mathrm{J}) \subset \mathcal{B}(\mathrm{K})}$ et $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B}(\mathrm{I})$ $\forall\, \tilde g \in \mathcal{B}(\mathrm{J})$ on a

$$\boxed{\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} = \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}}\,.$$

Dém : On a $|\tilde f| \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}$ et $|\tilde g| \le \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$, donc $|\tilde f \otimes \tilde g| = |\tilde f| \otimes |\tilde g| \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$, donc $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$; par ailleurs soit $\varepsilon > 0$; soit $p \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $\|p\|_1 \le 1$ et $\tilde f(p) \ge \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon$; de même soit $q \in \mathcal{E}(\mathrm{J})$ tel que $\|q\|_1 \le 1$ et $\tilde f(q) \ge \|\tilde g\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon$;
on a $\|p \otimes q\|_1 = \|p\|_1 \|q\|_1 \le 1$ et $(\tilde f \otimes \tilde g)(p \otimes q) = \tilde f(p)\, \tilde g(q)$
$\ge \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \|\tilde g\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon\,\big(\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} + \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}\big)$, donc $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} \ge \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \|\tilde g\|_{\mathrm{B}} - \varepsilon\,\big(\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} + \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}\big)$;
donc $\|\tilde f \otimes \tilde g\|_{\mathrm{B}} \ge \|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \|\tilde g\|_{\mathrm{B}}$.

§ 5. Points de Lebesgue

Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Quelle signification donner à $\tilde f(x+u)$ quand $\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$? Si $\tilde f$ est la limite en norme $\|\ \|_1$ de la suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$, il semble naturel de définir $\tilde f(x+u)$ comme la limite en norme $\|\ \|_1$ de la suite $f_n(x+u)$.

5.1. Théorème : Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde f$;
on convient de prolonger $\tilde f$ et $\tilde f_n$ par 0 en dehors de I ; alors $f_n(x+u)$ converge en norme $\|\ \|_1$ sur $\mathrm{I} \times \mathbb{R}$ vers une fonctionnelle $\tilde f(x+u) \in \mathcal{L}^1\big(\mathrm{I} \times \mathbb{R}\big)$, indépendante de la suite particulière f_n.

Dém : On a $\forall\, p > n \quad \displaystyle\iint_{\mathrm{I}\times\mathbb{R}} |\, f_p(x+u) - f_n(x+u)\,|\; dx\; du$

$$= \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathbb{R}} |\, f_p(x+u) - f_n(x+u)\,|\; du \Big]\; dx = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathbb{R}} |\, f_p(v) - f_n(v)\,|\; dv \Big]\; dx$$

$= |\mathrm{I}|\; \|\, f_p - f_n \|_1$; donc $f_n(x+u)$ est bien une suite de Cauchy pour la norme $\|\;\|_1$ sur $\mathrm{I}\times\mathbb{R}$, dont nous noterons la limite $\tilde f(x+u)$. On démontre de façon analogue que cette limite est effectivement indépendante de la suite particulière f_n.

Attention ! $\tilde f(x+u)$ n'est pas une *fonction* des "variables" x et u, mais bien une *fonctionnelle* agissant sur $\mathcal{E}_O\big(\mathrm{I}\times\mathbb{R}\big)$; la meilleure façon d'interpréter les symboles x et u revient donc à les considérer comme des *variables potentielles d'intégration*.

Il en va de même pour l'expression $\tilde f(x)$, dépourvue d'intégration explicite sur x, (écriture que nous avons soigneusement évitée jusqu'à présent) : dans ce qui suit $\tilde f(x)$ représente en réalité la fonctionnelle $\tilde f \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, elle aussi définie sur $\mathcal{E}_O\big(\mathrm{I}\times\mathbb{R}\big)$.

5.2. Définition : Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$; on pose $\underline{\forall\, s\,,\, t > 0}$

$$\boxed{\widetilde\Psi_{s,t}(\tilde f) = \frac{1}{s+t} \int_{-s}^{t} \big|\, \tilde f(x+u) - \tilde f(x) \big|\; du}\,.$$

$(s+t)\,\widetilde\Psi_{s,t}(\tilde f)$ n'est rien d'autre que la fonctionnelle marginale sur I de $\big|\,\tilde f(x+u) - \tilde f(x)\big|$ restreint à $\mathrm{I}\times[-s\,,\,t\,]$; en conséquence $\forall\, s\,,\, t>0 \quad \widetilde\Psi_{s,t}(\tilde f) \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$.

5.3. Théorème : Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$; alors $\boxed{\widetilde\Psi_{s,t}(\tilde f) \overset{\mathrm{pp}}{\to} 0}$ quand $s+t \to 0$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $g \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$ tel que $\big\|\,\tilde f - g\big\|_1 \le \varepsilon^2$; alors on a $\forall\, s, t > 0$

$$\widetilde\Psi_{s,t}(\tilde f) \le \frac{1}{s+t} \int_{-s}^{t} \big|\, \tilde f(x+u) - g(x+u) \big|\; du$$
$$+ \frac{1}{s+t} \int_{-s}^{t} |\, g(x+u) - g(x)\,|\; du + \big|\, \tilde f(x) - g(x) \big|$$
$$= \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} \big|\, \tilde f(u) - g(u) \big|\; du + \frac{1}{s+t} \int_{-s}^{t} |\, g(x+u) - g(x)\,|\; du + \big|\, \tilde f - g \big| \;;$$

donc $\Big\{ \widetilde\Psi_{s,t}(\tilde f) > \varepsilon \Big\} \le \Big\{ \dfrac{1}{s+t} \displaystyle\int_{x-s}^{x+t} \big|\, \tilde f(u) - g(u) \big|\; du > \frac{\varepsilon}{3} \Big\}$

$$+ \Big\{ \frac{1}{s+t} \int_{-s}^{t} |\, g(x+u) - g(x)\,|\; du > \frac{\varepsilon}{3} \Big\} + \Big\{ \big|\, \tilde f - g \big| > \frac{\varepsilon}{3} \Big\}.$$

On continue ensuite comme au Théorème X 4. 4

5.4.* Corollaire :

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I})$; alors $\boxed{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{-t}^{t} \left|\tilde{f}(x+u) - \tilde{f}(x)\right| du \overset{\text{pp}}{\to} 0}$ quand $t \to 0$.

Ce corollaire correspond à l'affirmation classique de l'existence des "points de Lebesgue" presque partout sur I.

§ 6. Théorème de Fubini

6.1. Théorème de projection (voir notation au Théorème XIII B.)

Soit $f \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$; alors $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$ $\boxed{f(x_\circ, *) \in \mathcal{E}(\mathrm{J})}$.

$\boxed{\text{Idem en remplaçant } \mathcal{E} \text{ par } \mathcal{C},\ \mathcal{R},\ \mathcal{PR} \text{ ou } \mathcal{W}}$.

Dém : Le théorème est évident pour $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$. Démontrons-le pour $\mathcal{W}$. Soient $\varepsilon > 0$, $x_\circ \in \mathrm{I}$, $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(\mathrm{J})$; soient $g, h \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$ telles que $g \le f \le h$ et $(\delta_{x_\circ} \otimes \tilde{\nu})(h-g) \le \varepsilon$; on a $g(x_\circ, *) \in \mathcal{PR}(\mathrm{J})$, $h(x_\circ, *) \in \mathcal{PR}(\mathrm{J})$ et $g(x_\circ, *) \le f(x_\circ, *) \le h(x_\circ, *)$; de plus grâce au théorème de Fubini dans $\mathcal{PR}(\mathrm{K})$ (que nous démontrons plus loin) on peut écrire
$\tilde{\nu}\left[h(x_\circ, *) - g(x_\circ, *)\right] = (\delta_{x_\circ} \otimes \tilde{\nu})(h-g) \le \varepsilon$; donc $f(x_\circ, *) \in \mathcal{W}(\mathrm{J})$.

6.2. Théorème de transfert

Soient $f \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ et $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathrm{J})$; on pose $\forall\, x \in \mathrm{I}$
$F(x) = \tilde{\nu}\left[f(x, *)\right] = \displaystyle\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde{\nu}(y)$; alors $\boxed{F \in \mathcal{E}(\mathrm{I})}$.

$\boxed{\text{Idem en remplaçant } \mathcal{E} \text{ par } \mathcal{C},\ \mathcal{R},\ \mathcal{PR} \text{ ou } \mathcal{W}}$.

Dém :

a) $f \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$: Evident.

b) $f \in \mathcal{C}(\mathrm{K})$: Soit $\varepsilon > 0$; par compacité de K il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ $\forall\, y_1, y_2 \in \mathrm{J}$ $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \le \varepsilon$; en particulier $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ $\forall\, y \in \mathrm{J}$ $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \le \varepsilon$; donc $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ on a
$|F(x_1) - F(x_2)| \le \displaystyle\int_{\mathrm{J}} \left|f(x_1, y) - f(x_2, y)\right| \tilde{\nu}(y) \le \varepsilon\, \|\tilde{\nu}\|_\star$; donc $F \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$.

c) $f \in \mathcal{R}(\mathrm{K})$: Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \overset{\mathbf{u}}{\to} f$;

posons $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad F_n(x_\circ) = \tilde{\nu}\left[f_n(x_\circ, *)\right]$; on a $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$

$|F(x_\circ) - F_n(x_\circ)| \le \int_{\mathrm{J}} \left| f(x_\circ, y) - f_n(x_\circ, y)\right| \tilde{\nu}(y) \le \|f - f_n\| \, \|\tilde{\nu}\|_\star$;

donc $F_n \overset{\mathbf{u}}{\to} F$; or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$, donc $F \in \mathcal{R}(\mathrm{I})$.

d) $f \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$: Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f$; on a en particulier $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad f_n(x_\circ, *) \overset{\mathrm{b}}{\to} f(x_\circ, *)$, donc par le théorème de Lebesgue sur J

$\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad F_n(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} f_n(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}(y) \to \int_{\mathrm{J}} f_n(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}(y) = F(x_\circ)$; de plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\|F_n\| \le \|f_n\| \, \|\tilde{\nu}\|_\star$, donc $F_n \overset{\mathrm{b}}{\to} F$; or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$, donc $F \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$.

e) $f \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$: Soient $\varepsilon > 0$, $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+(\mathrm{I})$, $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(\mathrm{J})$; soient $g\,,\, h \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$ telles que $g \le f \le h$ et $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h - g) \le \varepsilon$; posons $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$

$G(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} g(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}(y)$ et $H(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} h(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}(y)$;

on a $G\,,\, H \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$ et $G \le F \le H$;

de plus grâce au théorème de Fubini dans $\mathcal{PR}(\mathrm{K})$ (que nous démontrons plus loin) on peut écrire $\tilde{\mu}(H - G) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h - g) \le \varepsilon$; donc $F \in \mathcal{W}(\mathrm{I})$.

Le théorème est donc démontré pour tout $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(\mathrm{J})$; soit alors $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathrm{J})$;

on a $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad F(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}(y) = \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}^+(y) - \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}^-(y)$,

donc $F \in \mathcal{W}(\mathrm{I})$.

6.3. Théorème de Fubini

Soient $f \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$, $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathrm{I})$, $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathrm{J})$; alors on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde{\nu}(y) \Big] \tilde{\mu}(x) = \int_{\mathrm{J}} \Big[\int_{\mathrm{I}} f(x, y)\, \tilde{\mu}(x) \Big] \tilde{\nu}(y)}\,.$$

Dém :

a) $f \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$: Evident.

b) $f \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$: Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f$;

par définition on a $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \lim_n \left[(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f_n)\right]$; or on peut écrire $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f_n) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f_n(x, y)\, \tilde{\nu}(x) \Big] \tilde{\mu}(y)$; posons $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I}$

$F(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} f(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}(y)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n(x_\circ) = \int_{\mathrm{J}} f_n(x_\circ, y)\, \tilde{\nu}(y)$;

on a $F \in \mathcal{PR}(\mathrm{I})$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(\mathrm{I})$; comme $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad f_n(x_\circ, *) \overset{\mathrm{b}}{\to} f(x_\circ, *)$,

le théorème de Lebesgue sur J nous donne $\forall\, x_\circ \in \mathrm{I} \quad F_n(x_\circ) \to F(x_\circ)$;

on en déduit $F_n \overset{\mathrm{b}}{\to} F$; le théorème de Lebesgue sur I nous donne donc

$(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f_n) = \int_{\mathrm{I}} F_n(x)\, \tilde\mu(x) \to \int_{\mathrm{I}} F(x)\, \tilde\mu(x)$; on en déduit

$(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) = \lim\limits_n \big[(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f_n)\big] = \int_{\mathrm{I}} F(x)\, \tilde\mu(x)$.

c) $f \in \mathcal{W}(\mathrm{K})$: Soient $\tilde\mu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{I})$ et $\tilde\nu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{I})$; soit $\varepsilon > 0$

et soient $g, h \in \mathcal{PR}(\mathrm{K})$ tels que $g \le f \le h$ et $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h - g) \le \varepsilon$;

on a $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} g(x, y)\, \tilde\nu(y)\Big]\, \tilde\mu(x)$

et $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} h(x, y)\, \tilde\nu(y)\Big]\, \tilde\mu(x)$;

on en déduit $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h)$

et $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) \le \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde\nu(y)\Big]\, \tilde\mu(x) \le (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h)$;

de plus $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(h) - (\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(g) \le \varepsilon$;

donc $\Big|(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) - \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde\nu(y)\Big]\, \tilde\mu(x)\Big| \le \varepsilon$;

comme ε est arbitraire on en déduit $(\tilde\mu \otimes \tilde\nu)(f) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{J}} f(x, y)\, \tilde\nu(y)\Big]\, \tilde\mu(x)$.

Le cas général s'obtient en décomposant $\tilde\mu$ et $\tilde\nu$ en parties positives et négatives.

§ 7. Généralisation à $\mathbb{R}^2$

Les deux théorèmes suivants se déduisent facilement des théorèmes correspondants pour les rectangles.

A. Théorème de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$

> Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$; alors $\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^2)$ on a $f_n\, \tilde\mu \overset{\times}{\to} f\, \tilde\mu$; en conséquence $\tilde\mu(f_n) \to \tilde\mu(f)$.

B. Théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^2$

Soient $f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$ et $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; alors $\int_{\mathbb{R}} f(*, y)\, \tilde{\nu}(y)$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x, *)\, \tilde{\mu}(x)$ appartiennent à $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \tilde{\nu}(y) \Big]\, \tilde{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \tilde{\mu}(x) \Big]\, \tilde{\nu}(y)}\,.$$

C. Théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^2$: Intégrales généralisées

Soit $f \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ et supposons $\boxed{\sup_k \int_{-k}^{k} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy < +\infty}$;

alors $\int_{\mathbb{R}} f(*, y)\, dy$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x, *)\, dx$ appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \Big]\, dx = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx \Big]\, dy}\,.$$

Dém : Posons $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k = \int_{-k}^{k} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy$ et soit $\alpha = \sup_k \alpha_k < +\infty$;

on a $\forall\, \ell \geq k \quad \alpha_\ell - \alpha_k = \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x, y)|\, dx\, dy - \int_{-k}^{k} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy$

$$= \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x, y)|\, dx\, dy - \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy$$
$$+ \int_{-\ell}^{-k} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy + \int_{k}^{\ell} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{-k} |f(x, y)|\, dx\, dy + \int_{-\ell}^{\ell} \int_{k}^{\ell} |f(x, y)|\, dx\, dy$$
$$+ \int_{-\ell}^{-k} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy + \int_{k}^{\ell} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy\,.$$

Par ailleurs posons $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad F_k = \int_{-k}^{k} f(*, y)\, dy \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$;

F_k est une fonction sommable ; en effet on a $\forall\, n \geq k$

$$\int_{-n}^{n} |F_k(x)|\, dx = \int_{-n}^{n} \Big| \int_{-k}^{k} f(x, y) \Big|\, dx\, dy \leq \int_{-n}^{n} \int_{-k}^{k} |f(x, y)|\, dx\, dy \leq \alpha_n \leq \alpha\ ;$$

donc $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \|F_k\|_1 = \sup_n \int_{-n}^{n} |F_k(x)|\, dx \leq \alpha\,.$

Montrons que la suite F_k converge sur $\mathbb{R}$ en norme $\| \ \|_1$; on a $\forall\, n \geq \ell > k$

$$\int_{-n}^{n} |F_\ell(x) - F_k(x)|\, dx = \int_{-n}^{n} \Big| \int_{-\ell}^{\ell} f(x,y)\, dy - \int_{-k}^{k} f(x,y)\, dy \Big|\, dx$$

$$= \int_{-n}^{n} \Big| \int_{-\ell}^{-k} f(x,y)\, dy + \int_{k}^{\ell} f(x,y)\, dy \Big|\, dx$$

$$\leq \int_{-n}^{n} \int_{-\ell}^{-k} |f(x,y)|\, dx\, dy + \int_{-n}^{n} \int_{k}^{\ell} |f(x,y)|\, dx\, dy$$

$$\leq \int_{-n}^{n} \int_{-n}^{-k} |f(x,y)|\, dx\, dy + \int_{-n}^{n} \int_{k}^{n} |f(x,y)|\, dx\, dy \leq \alpha_n - \alpha_k \leq \alpha - \alpha_k \ ;$$

on en déduit $\forall\, \ell > k \quad \| F_\ell - F_k \|_1 = \lim_n \int_{-n}^{n} |F_\ell(x) - F_k(x)|\, dx \leq \alpha - \alpha_k$.

Par conséquent la suite F_k est de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et converge vers une fonctionnelle de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, que nous notons $\int_{\mathbb{R}} f(*,y)\, dy$.

De même $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad G_k = \int_{-k}^{k} f(x,*)\, dx \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ est une fonction sommable, et la suite G_k converge sur $\mathbb{R}$ en norme $\| \ \|_1$ vers $\int_{\mathbb{R}} f(x,*)\, dx \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Montrons que l'on a $\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \Big]\, dx = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \Big]\, dy$,

c-à-d $\quad \lim_k \int_{\mathbb{R}} F_k(x)\, dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}} G_k(x)\, dx$,

c-à-d $\quad \lim_k \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{-k}^{k} f(x,y)\, dy \Big]\, dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{-k}^{k} f(x,y)\, dx \Big]\, dy$

c-à-d $\quad \lim_k \lim_j \int_{-j}^{j} \Big[\int_{-k}^{k} f(x,y)\, dy \Big]\, dx = \lim_k \lim_j \int_{-j}^{j} \Big[\int_{-k}^{k} f(x,y)\, dx \Big]\, dy$

c-à-d $\quad \lim_k \lim_j \int_{-k}^{k} \int_{-j}^{j} f(x,y)\, dx\, dy = \lim_k \lim_j \int_{-j}^{j} \int_{-k}^{k} f(x,y)\, dx\, dy$.

On a $\forall\, k > j \quad \Big| \int_{-k}^{k} \int_{-j}^{j} f(x,y)\, dx\, dy - \int_{-j}^{j} \int_{-k}^{k} f(x,y)\, dx\, dy \Big|$

$$= \Big| \int_{-k}^{k} \int_{-j}^{j} f(x,y)\, dx\, dy - \int_{-j}^{j} \int_{-j}^{j} f(x,y)\, dx\, dy - \int_{-j}^{j} \int_{-k}^{-j} f(x,y)\, dx\, dy - \int_{-j}^{j} \int_{j}^{k} f(x,y)\, dx\, dy \Big|$$

$$= \Big| \int_{-k}^{-j} \int_{-j}^{j} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{j}^{k} \int_{-j}^{j} f(x,y)\, dx\, dy - \int_{-j}^{j} \int_{-k}^{-j} f(x,y)\, dx\, dy - \int_{-j}^{j} \int_{j}^{k} f(x,y)\, dx\, dy \Big|$$

$$\le \int_{-k}^{-j}\int_{-j}^{j}|f(x,y)|\,dx\,dy + \int_{j}^{k}\int_{-j}^{j}|f(x,y)|\,dx\,dy$$
$$+ \int_{-j}^{j}\int_{-k}^{-j}|f(x,y)|\,dx\,dy + \int_{-j}^{j}\int_{j}^{k}|f(x,y)|\,dx\,dy$$
$$\le \int_{-k}^{-j}\int_{-j}^{j}|f(x,y)|\,dx\,dy + \int_{j}^{k}\int_{-j}^{j}|f(x,y)|\,dx\,dy$$
$$+ \int_{-k}^{k}\int_{-k}^{-j}|f(x,y)|\,dx\,dy + \int_{-k}^{k}\int_{j}^{k}|f(x,y)|\,dx\,dy = \alpha_k - \alpha_j\ ;$$

donc $\displaystyle \lim_k \lim_j \left| \int_{-k}^{k}\int_{-j}^{j} f(x,y)\,dx\,dy - \int_{-j}^{j}\int_{-k}^{k} f(x,y)\,dx\,dy \right| \le \alpha - \alpha = 0\,.$

§ 8. Généralisation à $\mathbb{R}^n$

Tous les résultats de ce chapitre se généralisent sans difficulté majeure aux espaces $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$.

Récapitulatif : (les flèches simples représentent des inclusions)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{W}(\mathbb{R}^n) & \underset{surj.}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{PM}(\mathbb{R}^n) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) & \underset{surj.}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) & & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{PM}^\bullet(\mathbb{R}^n) \\
\nearrow & & \uparrow & & \nwarrow & \nearrow & & & & & \\
\mathcal{W}_O(\mathbb{R}^n) & \twoheadrightarrow & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) & & & & & &
\end{array}$$

CHAPITRE XVI

APPLICATIONS

Dérivation des primitives. Convolution. Transformée de Laplace. Théorème de Titchmarsh. Transformée de Fourier.

§ 1. Dérivation des primitives

1.1. Définition : Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$; on pose $\forall\, s > 0 \quad \forall\, t > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) = \frac{1}{s+t}\ \tilde{\mu}\left(\mathbb{1}_{[x-s,\,x+t]}\right) = \frac{1}{s+t}\int_{x-s}^{x+t}\tilde{\mu}(u)}\,.$$

1.2. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ et $\left\| \Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \right\| \leq \dfrac{1}{s+t}\, \|\tilde{\mu}\|_{\star}$.

Dém : Si F est une primitive de $\tilde{\mu}$ on a $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) = \dfrac{1}{s+t}\big[F(x+t) - F(x-s)\big]$, donc $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})$ est une fonction continue ;

de plus $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \left|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)\right| \leq \dfrac{1}{s+t}\displaystyle\int_{x-s}^{x+t} |\tilde{\mu}|(x) \leq \dfrac{1}{s+t}\, \|\tilde{\mu}\|_{\star}$.

1.3. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\boxed{\left\| \Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \right\|_1 \leq \|\tilde{\mu}\|_{\star}}$.

Dém : $\left\| \Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \right\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)\right| dx \leq \frac{1}{s+t}\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-s,\,x+t]}(u)\,|\tilde{\mu}|(u)\Big]\,dx$

or $\forall\, x,\, s,\, t \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{1}_{[x-s,\,x+t]}(u) = \mathbb{1}_{[u-t,\,u+s]}(x)$, donc

$$\left\| \Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \right\|_1 \leq \frac{1}{s+t}\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[u-t,\,u+s]}(x)\ dx\Big]\,|\tilde{\mu}|(u) = \frac{1}{s+t}\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{u-t}^{u+s} dx\Big]\,|\tilde{\mu}|(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\mu}|(t) = \|\tilde{\mu}\|_{\star}.$$

1.4.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}}$.

1.5. Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ on a $\left\| \Phi_{s,t}(f) \right\| \leq \|f\|$;

de plus $\Phi_{s,t}(f) \to f$ uniformément sur tout compact quand $s+t \to 0$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \left|\Phi_{s,t}(f)(x)\right| \leq \dfrac{1}{s+t}\displaystyle\int_{x-s}^{x+t} |f|(u)\, du \leq \|f\|$;

d'autre part soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$;

comme f est uniformément continue dans $[a,b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$\forall\, u,\, v \in [a,b] \quad \Big[\, |u-v| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon \,\Big]$; on a donc $\forall\, s,\, t \leq \alpha$

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \left|\Phi_{s,t}(f)(x) - f(x)\right| = \left| \int_0^1 \Big[f\big[x + (s+t)\,u - s\big] - f(x) \Big]\, du \right|$$

$$\leq \int_0^1 \Big| f\big[x + (s+t)\,u - s\big] - f(x) \Big|\, du \leq \varepsilon .$$

1.6. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a $\Phi_{s,t}(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \tilde{f}$ quand $s+t \to 0$.

<u>Dém</u> : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $\Phi_{s,t} - \mathrm{I} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\Phi_{s,t}(\tilde{f}) \xrightarrow{2} \tilde{f}$ quand $s+t \to 0$.

<u>Dém</u> : Analogue à la précédente.

1.8. <u>Lemme</u> : $\forall\, f \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ on a $\left\|\Phi_{s,t}(f)\right\| \leq \|f\|$; de plus, si $x \in \mathbb{R}$ est un point de continuité de f on a $\Phi_{s,t}(f)(x) \to f(x)$ quand $s+t \to 0$.

<u>Dém</u> : Il suffit de faire un dessin !

1.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathbb{R})$ on a $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \xrightarrow{\phi} \tilde{\mu}$ quand $s+t \to 0$.

<u>Dém</u> : Comme $\forall\, s,\, t > 0$ on a $\left\|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})\right\|_1 \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$, il suffit de montrer que

$$\forall\, h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)\, h(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} h(u)\, \tilde{\mu}(u) \quad \text{quand} \quad s+t \to 0 .$$

On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)\, h(x)\, dx = \frac{1}{s+t} \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-s,\, x+t]}(u)\, |\tilde{\mu}|(u) \Big]\, h(x)\, dx$

$$= \frac{1}{s+t} \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[u-t,\, u+s]}(x)\, h(x)\, dx \Big]\, \tilde{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(h)(u)\, \tilde{\mu}(u) \;;$$

or $\Phi_{s,t}(h) \xrightarrow{\mathrm{b}} h$, donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)\, h(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} h(u)\, \tilde{\mu}(u)$.

§ 2. Convolution sur $\mathbb{R}$

2.1. Lemme : Soit $f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$; posons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (r,s) \mapsto f(r+s)$; alors on a $F \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^2)$.

Dém : Il suffit de faire un dessin.

2.2. Définition : La convolée de $\tilde{\mu}\,,\,\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ est définie par

$$\boxed{\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \ : \ \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ : \ f \mapsto \iint_{\mathbb{R}^2} f(r+s)\,\tilde{\mu}(r)\,\tilde{\nu}(s)}\,.$$

2.3. Théorème : $\forall\,\tilde{\mu}\,,\,\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ et $\|\,\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\,\|_\star \leq \|\,\tilde{\mu}\|_\star\,\|\tilde{\nu}\|_\star$.

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ $\big|(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h)\big| \leq \|h\| \iint_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\mu}|(r)\,|\tilde{\nu}|(s) = \|\tilde{\mu}\|_\star\,\|\tilde{\nu}\|_\star\,\|h\|$; donc $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ et $\|\,\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\,\|_\star \leq \|\,\tilde{\mu}\|_\star\,\|\tilde{\nu}\|_\star$.
Montrons que $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$; soit $\alpha \in \mathbb{R}$; posons $\forall\,\varepsilon \neq 0$ $g_\varepsilon = \mathbb{1}_{]\,\alpha\,,\,\alpha+\varepsilon\,[}$; fixons $s \in \mathbb{R}$ et posons $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : r \mapsto g_\varepsilon(r+s)$; on a $h_\varepsilon = \mathbb{1}_{]\,\alpha-s\,,\,\alpha-s+\varepsilon\,[}$; donc $h_\varepsilon \overset{\circ}{\to} 0$ quand $\varepsilon \to 0$; de plus $\forall\,\varepsilon \neq 0$ $\|h_\varepsilon\| = 1$; donc $\forall\, s \in \mathbb{R}$ on a $k_\varepsilon(s) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(r+s)\,\tilde{\mu}(r) = \int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(r)\,\tilde{\mu}(r) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$; de plus $\forall\,\varepsilon \neq 0$ on a $\|k_\varepsilon\| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$, donc $\int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(s)\,\tilde{\nu}(s) = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(g_\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$; donc $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

2.4.* Théorème : $\forall\,\tilde{\mu}\,,\,\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}(\mathbb{1})\,\tilde{\nu}(\mathbb{1})$; de plus si $\tilde{\mu}\,,\,\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$, alors $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$ et $\|\,\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\,\|_\star = \|\,\tilde{\mu}\|_\star\,\|\tilde{\nu}\|_\star$.

2.5. Théorème : $(\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})\,,\,*)$ est une algèbre de Banach associative, commutative et unitaire. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$.

Dém : Classique.

2.6. Théorème : $\forall\,\tilde{\mu}\,,\,\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ $\forall\, f \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R})$ on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(r+s)\,\tilde{\mu}(r)\,\tilde{\nu}(s)}\,.$$

Dém : Soit $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^2)$ avec $f_n \overset{b}{\to} f$; on a donc $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f_n) \to (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f)$; posons $F(r,s) = f(r+s)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $F_n(r,s) = f_n(r+s)$; on a

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $F_n \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^2)$ et $F_n \overset{b}{\to} F$, donc $F \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$

et $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F_n) \to (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F)$; or on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f_n) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F_n)$,

donc $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F)$ quand $n \to +\infty$.

2.7. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ $\forall\, f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)}\,.$$

Dém : Par linarité on peut supposer $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$, donc $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$ et $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^2)^+$. Soit $\varepsilon > 0$ et soient $g, h \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R})$ tels que $g \le f \le h$ et $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h-g) \le \varepsilon$. Posons $G(r,s) = g(r+s)$ et $H(r,s) = h(r+s)$.

On a $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(g) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(G) \le (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F) \le (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(H) = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h)$

et $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(g) \le (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) \le (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h)$, donc

$|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) - (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(F)| \le |(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h) - (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(g)| = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h-g) \le \varepsilon$;

on en déduit $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F)$.

§ 3. Convolution sur $\mathbb{R}^+$

(Démonstrations analogues à celles du paragraphe précédent.)

3.1. Lemme : Soit $f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+)$; posons $F : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R} : (r,s) \mapsto f(r+s)$; alors on a $F \in \mathcal{PR}_O[(\mathbb{R}^+)^2]$.

3.2. Définition : La convolée de $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ est définie par

$$\boxed{\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \ :\ \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R} \ :\ f \mapsto \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)}\,.$$

3.3. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ on a $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.

3.4. Théorème :

$\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ on a $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ et $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_\star \le \|\tilde{\mu}\|_\star \|\tilde{\nu}\|_\star$.

3.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^{+})$ on a $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}\,(\mathbb{1})\, \tilde{\nu}\,(\mathbb{1})$; de plus si $\tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^{+})^{+}$, alors $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^{+})^{+}$ et $\|\, \tilde{\mu} * \tilde{\nu}\,\|_{\star} = \|\, \tilde{\mu}\,\|_{\star}\, \|\tilde{\nu}\|_{\star}$.

3.6. <u>Théorème</u> : $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^{+})\,,\, *)$ est une algèbre de Banach associative commutative et unitaire. $\mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^{+})$ et $\mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}^{+})$ sont des sous-algèbres de Banach de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{+})$.

3.7. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{+})$ $\forall\, f \in \mathcal{W}_{O}(\mathbb{R}^{+})$ on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})\,(f) = \iint_{(\mathbb{R}^{+})^{2}} f\,(r+s)\, \tilde{\mu}\,(r)\, \tilde{\nu}\,(s)}\,.$$

§ 4. <u>Transformée de Laplace</u>

4.1. <u>Définition</u> :

On pose $\mathrm{H} = \big\{ z \in \mathbb{C} \;||\; Re\,(z) > 0 \big\}$; soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^{+})$; on définit $\forall\, z \in \mathrm{H}$

$$\boxed{(\mathrm{L}\,\tilde{\mu})\,(z) = \int_{\mathbb{R}^{+}} e^{-zt}\, \tilde{\mu}\,(t)}\,.$$

$\mathrm{L}\,\tilde{\mu}$ est la <u>transformée de Laplace</u> de $\tilde{\mu}$.

4.2. <u>Théorème</u> : $\mathrm{L}\,\tilde{\mu}$ est une fonction analytique dans H ; de plus $\|\mathrm{L}\,\tilde{\mu}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_{\star}$.

<u>Dém</u> : On applique le théorème d'holomorphie.

4.3. <u>Lemme</u> :

Soit $h \in \mathcal{C}_{O}(\mathbb{R}^{+})$ et $\varepsilon > 0$; alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\boxed{\forall\, t \geq 0 \quad \big|\, h(t) - P(e^{-t})\, \big| \leq \varepsilon}\,.$$

<u>Dém</u> : On définit la fonction k : $[\,0\,,1\,] \to \mathbb{R}$ de la manière suivante : $k(0) = 0$ et $k(u) = h\,(-\ln\, u)$ si $0 < u \leq 1$; la fonction k étant continue sur $[\,0\,,1\,]$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\, u \in [\,0\,,1\,]$ $\big|\, k(u) - P(u)\, \big| \leq \varepsilon$; en particulier on a $\forall\, u \in\,]\,0\,,1\,]$ $\big|\, h\,(-\ln\, u) - P(u)\, \big| \leq \varepsilon$; on en déduit $\forall\, t \in \mathbb{R}^{+}$ $\big|\, h(t) - P(e^{-t})\, \big| \leq \varepsilon$.

4.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^{+})$ on a $\big[\, \mathrm{L}\,\tilde{\mu} = 0$ dans $\mathrm{H} \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0\, \big]$.

<u>Dém</u> : Supposons $\mathrm{L}\,\tilde{\mu} = 0$ dans H ; alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+}} e^{-n\,t}\, \tilde{\mu}\,(t) = 0$, donc

aussi $\forall\, P \in \mathbb{R}[X] \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} P(e^{-t})\, \tilde{\mu}(t) = 0$; en vertu du lemme précédent on en déduit $\forall\, h \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R}^+) \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} h(t)\, \tilde{\mu}(t) = 0$, c-à-d $\tilde{\mu} = 0$.

4.5. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^+)$ on a $\boxed{\mathrm{L}\,(\tilde{\mu} * \tilde{\nu}) = (\mathrm{L}\,\tilde{\mu})\,(\mathrm{L}\,\tilde{\nu})}$.

Dém : On a $\forall\, z \in \mathrm{H}$

$$\mathrm{L}\,(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(z) = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-z\,(r+s)}\, \tilde{\mu}\,(r)\, \tilde{\nu}\,(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-z\,r}\, \tilde{\mu}\,(r) \int_{\mathbb{R}} e^{-z\,s}\, \tilde{\nu}\,(s) = (\mathrm{L}\,\tilde{\mu})\,(z)\ (\mathrm{L}\,\tilde{\nu})\,(z)\,.$$

§ 5. Théorème de Titchmarsh

5.1. Théorème de Titchmarsh dans $\mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^+)$

$$\boxed{\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^+) \quad \text{on a} \quad \Big[\, \tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\tilde{\mu} = 0 \;\text{ ou }\; \tilde{\nu} = 0)\Big]}\,.$$

Dém : Supposons $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$; on en déduit $(\mathrm{L}\,\tilde{\mu})\,(\mathrm{L}\,\tilde{\nu}) = 0$; $\mathrm{L}\,\tilde{\mu}$ et $\mathrm{L}\,\tilde{\nu}$ sont des fonctions analytiques dans H ; supposons $\mathrm{L}\,\tilde{\mu} \neq 0$; alors les zéros de $\mathrm{L}\,\tilde{\mu}$ sont isolés ; donc les zéros de $\mathrm{L}\,\tilde{\nu}$ sont denses, donc $\mathrm{L}\,\tilde{\nu} = 0$, donc $\tilde{\nu} = 0$.

5.2. Définition : $\forall\, a > 0$ on pose $\boxed{\mathsf{Y}_a = \mathbb{1}_{[\,0\,,\,a]}} \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+)$;

$\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}_{\,a} = \mathsf{Y}_a\,.\,\tilde{\mu}} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^+)$.

5.3. Lemme : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^+) \quad \forall\, a > 0$ on a

$$\Big[\int_0^a e^{\,z\,(a-t)}\, \tilde{\mu}(t) \ \text{ borné dans H}\Big] \Rightarrow \tilde{\mu}_{\,a} = 0\,.$$

Dém :

Posons $\forall\, z \in \mathbb{C} \quad G\,(z) = \displaystyle\int_0^a e^{\,z\,(a-t)}\, \tilde{\mu}\,(t)$ et supposons G borné dans H ; G est par ailleurs borné dans $\mathbb{C} - \mathrm{H}$; or G est anlytique dans $\mathbb{C}$, donc $G = 0$ dans $\mathbb{C}$.

On en déduit $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad G^{\,(n)}(0) = \displaystyle\int_0^a (a-t)^n\, \tilde{\mu}\,(t) = 0$, donc $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$ $\displaystyle\int_0^a P\,(t)\, \tilde{\mu}\,(t) = 0$, donc aussi $\forall\, h \in \mathcal{C}\big([\,0\,,\,a\,]\,,\,\mathbb{R}\big) \quad \displaystyle\int_0^a h(t)\, \tilde{\mu}(t) = 0$,
donc $\tilde{\mu} = 0$ sur $[\,0\,,\,a\,]$.

5.4. <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ $\forall\, a>0$ on a

$$\Big[\, e^{az}\,(\mathrm{L}\,\tilde\mu)\,(z) \ \text{ borné dans } \mathrm{H} \Big] \ \Leftrightarrow\ \tilde\mu_{\,a} = 0\,.$$

<u>Dém</u> :

a) $\Leftarrow$: On a $e^{az}\,(\mathrm{L}\,\tilde\mu)\,(z) = \displaystyle\int_a^\infty e^{-z\,(t-a)}\,\tilde\mu\,(t)$ qui est bien borné sur H.

b) $\Rightarrow$: On a $\forall\, z\in \mathrm{H}$ $\displaystyle\int_0^a e^{z\,(a-t)}\,\tilde\mu\,(t) = e^{az}\,(\mathrm{L}\,\tilde\mu)\,(z) - \int_a^\infty e^{-z\,(t-a)}\,\tilde\mu\,(t)$

qui est borné dans H, donc $\tilde\mu_{\,a} = 0$.

5.5. <u>Lemme</u> :

Soit $\tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tel que $\tilde\mu * \tilde\mu = 0$ et soit $a>0$; alors $\big(\tilde\mu_{\,a} * \tilde\mu_{\,a}\big)_a = 0$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}\big([\,0\,,a\,]\,,\mathbb{R}\big)$

$$(\tilde\mu_{\,a} * \tilde\mu_{\,a})\,(h) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty h\,(r+s)\,\tilde\mu_{\,a}(r)\,\tilde\mu_{\,a}(s) = \int_0^a\!\!\int_0^a h\,(r+s)\,\tilde\mu\,(r)\,\tilde\mu\,(s)$$

$$= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty h\,(r+s)\,\tilde\mu\,(r)\,\tilde\mu\,(s) = (\tilde\mu * \tilde\mu)\,(h) = 0\,.$$

5.6. <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ on a $\big[\,\tilde\mu*\tilde\mu = 0 \ \Rightarrow\ \tilde\mu = 0\,\big]$.

<u>Dém</u> : Soit $a>0$; alors $(\tilde\mu_{\,a} * \tilde\mu_{\,a})_a = 0$, donc $e^{az}\,\mathrm{L}\,(\tilde\mu_{\,a} * \tilde\mu_{\,a}) = e^{az}\,[\mathrm{L}\,(\tilde\mu_{\,a})]^2$ $= [e^{az/2}\,\mathrm{L}\,(\tilde\mu_{\,a})]^2$ est borné dans H, donc également $e^{az/2}\,\mathrm{L}\,(\tilde\mu_{\,a})$; donc $(\tilde\mu_{\,a})_{a/2} = 0$, c-à-d $\tilde\mu_{\,a/2} = 0$; comme a est arbitraire, $\tilde\mu = 0$.

5.7. <u>Lemme</u> : Soient $\tilde\mu\,,\tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tels que $\tilde\mu * \tilde\nu = 0$; alors $(t\,\tilde\mu) * \tilde\nu = 0$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, h \in \mathcal{E}_O\big(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\big)$

$$0 = (\tilde\mu * \tilde\nu)\,[\,t\,.\,h(t)\,] = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (r+s)\,h\,(r+s)\,\tilde\mu\,(r)\,\tilde\nu\,(s)$$

$$= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty h\,(r+s)\,r\,\tilde\mu\,(r)\,\tilde\nu\,(s) + \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty h\,(r+s)\,\tilde\mu\,(r)\,s\,\tilde\nu\,(s) = \big[(t\,\tilde\mu)*\tilde\nu + \tilde\mu * (t\,\tilde\nu)\big](h)\ ;$$

posons $\tilde\mu' = t\,\tilde\mu$ et $\tilde\nu' = t\,\tilde\nu$; on a $\tilde\mu' * \tilde\nu + \tilde\mu * \tilde\nu' = 0$, donc

$0 = (\tilde\mu' * \tilde\nu) * (\tilde\mu' * \tilde\nu + \tilde\mu * \tilde\nu') = (\tilde\mu' * \tilde\nu) * (\tilde\mu' * \tilde\nu)$, donc $\tilde\mu' * \tilde\nu = 0$.

5.8. <u>Théorème</u> :

Soient $\tilde\mu\,,\tilde\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tels que $\tilde\mu * \tilde\nu = 0$; alors $\forall\, i\,,j \in \mathbb{N}$ $\big(t^i\,\tilde\mu\big) * \big(t^j\,\tilde\nu\big) = 0$.

<u>Dém</u> : On fait une récurrence sur i et j.

5.9. Lemme :

Soient $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tels que $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$; soit $a > 0$ et soit T_a le triangle dont les sommets sont $(0,0), (a,0), (0,a)$; alors $\forall P \in \mathbb{R}[X, Y]$ on a $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.P) = 0$.

Dém : $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.P) = \displaystyle\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \mathsf{Y}_a(r+s)\, P(r,s)\; \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)$

$$= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \mathsf{Y}_a(r+s)\; r^i s^j\; \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \left(t^i \tilde{\mu} * t^j \tilde{\nu}\right)\left(\mathsf{Y}_a\right) = 0 .$$

5.10. Théorème de Titchmarsh dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$

$$\boxed{\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \quad \text{on a} \quad \Big[\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\tilde{\mu} = 0 \;\text{ ou }\; \tilde{\nu} = 0)\Big]}\,.$$

Dém : On suppose $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$. Soit $g \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et choisissons $a > 0$ tel que $g = 0$ en dehors du triangle T_a ; soit $\varepsilon > 0$; d'après le théorème de Weierstrass pour un compact du plan, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que $\| g - P \| \leq \varepsilon$ dans T_a ; on peut dès lors écrire $\big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g)\big| = \big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.g)\big| \leq \big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.P)\big|$ $+ \big|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})[\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a}.(g-P)]\big| \leq \varepsilon\, |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}|(\mathbb{1}_{\mathrm{T}_a})$; comme ε est arbitraire, on a $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g) = 0$; on en déduit $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu} = 0$, donc $\tilde{\mu} = 0$ ou $\tilde{\nu} = 0$.

§ 6. **Transformée réelle de Fourier**

6.1. Définition : Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; on pose $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,t)\, \tilde{\mu}(t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(\mathrm{B}\,\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin(x\,t)\, \tilde{\mu}(t)}$$

$\mathrm{A}\,\tilde{\mu}$ et $\mathrm{B}\,\tilde{\mu}$ s'appellent la transformée cosinusoïdale et la transformée sinusoïdale de $\tilde{\mu}$.

Notation :

On note $\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées uniformément continues.

6.2.* Théorème : $\big(\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}), \|\ \|\big)$ est une algèbre de Riesz-Banach.

6.3. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a

1) $\mathrm{A}\,\tilde{\mu} \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B}\,\tilde{\mu} \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$

2) $\|\mathrm{A}\,\tilde{\mu}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$ et $\|\mathrm{B}\,\tilde{\mu}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$

3) $\mathrm{A}\,\tilde{\mu}$ est une fonction paire et $\mathrm{B}\,\tilde{\mu}$ est une fonction impaire

4) $\big(\tilde{\mu}$ impaire $\Rightarrow$ $\mathrm{A}\,\tilde{\mu} = 0\big)$ et $\big(\tilde{\mu}$ paire $\Rightarrow$ $\mathrm{B}\,\tilde{\mu} = 0\big)$.

<u>Dém</u> : Le reste étant trivial, montrons que $\mathrm{A}\,\tilde{\mu}$ et $\mathrm{B}\,\tilde{\mu}$ sont uniformément continues. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ tel que $\displaystyle\int_{|t|\geq N} |\tilde{\mu}(t)| \leq \varepsilon$; on a $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$

$$\big|(\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(u) - (\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(v)\big| = \Big| \int_{-N}^{N} \big[\cos(u\,t) - \cos(v\,t)\big]\, \tilde{\mu}(t) + \int_{|t|\geq N} \big[\cos(u\,t) - \cos(v\,t)\big]\, \tilde{\mu}(t) \Big|$$

$$\leq |u-v| \underbrace{\int_{-N}^{N} |t|\, |\tilde{\mu}(t)|}_{K} + 2\,\varepsilon \;;$$

on en déduit $\Big[\, |u-v| \leq \varepsilon/K \Rightarrow \big|(\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(u) - (\mathrm{A}\,\tilde{\mu})(v)\big| \leq 3\,\varepsilon \,\Big]$.

<u>Notation</u> : On note $\mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support borné et à dérivée seconde réglée.

6.4. <u>Théorème</u> : Soit $f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$; alors on a $\mathrm{A}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{B}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\boxed{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\, f = 2\,\pi\, f}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle(\mathrm{A}f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,t)\, f(t)\, dt$; donc $\forall\, x \neq 0$

$$(\mathrm{A}f)(x) = -\frac{1}{x} \int_{\mathbb{R}} \sin(x\,t)\, f'(t)\, dt = \frac{1}{x^2} \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,t)\, f''(t)\, dt \text{ ; on en déduit}$$

si $|x| \leq 1$ $|(\mathrm{A}f)(x)| \leq \|f\|_1$ et si $|x| \geq 1$ $\displaystyle|(\mathrm{A}f)(x)| \leq \frac{1}{x^2}\, \|f''\|_1$;

donc $\mathrm{A}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; idem pour $\mathrm{B}f$; $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$ est donc bien défini sur $\mathcal{R}_O^2(\mathbb{R})$.

On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\big[(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\, f\big](x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(x\,u) \Big[\int_{\mathbb{R}} \cos(u\,t)\, f(t)\, dt\Big]\, du + \int_{\mathbb{R}} \sin(x\,u) \Big[\int_{\mathbb{R}} \sin(u\,t)\, f(t)\, dt\Big]\, du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \big[\cos(x\,u)\cos(u\,t) + \sin(x\,u)\sin(u\,t)\big]\, f(t)\, dt\Big]\, du.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} \cos\big[u\,(t-x)\big]\, f(t)\, dt\Big]\, du = 2 \int_0^{\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}} \cos\big[u\,(t-x)\big]\, f(t)\, dt\Big]\, du$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $\forall\, u \geq 0$ $\displaystyle\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}} \cos\big[u\,(t-x)\big]\, f(t)\, dt$;

soit $M > 0$ tel que $\Big[\, |t| \geq M \Rightarrow f(t) = 0 \,\Big]$;

on a $\displaystyle\Phi(u) = \int_{-M}^{M} \cos\big[u\,(t-x)\big]\, f(t)\, dt$, donc $\forall\, u > 0$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{u} \int_{-M}^{M} \sin\big[u\,(t-x)\big]\, f'(t)\, dt = \frac{2}{u^2} \int_{-M}^{M} \sin^2\big[u\,(t-x)/2\big]\, f''(t)\, dt \;;$$

posons $\forall\, u > 0 \quad \forall\, t \in [-M, M] \quad H(u\,,t) = \dfrac{1+\,u^{3/2}}{u^2}\ \sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]$;

$\forall u \in\,]\,0,1]\ \ \forall t \in [-M, M]$ on a $0 \le H(u\,,t) \le \dfrac{1}{2}\,(t-x)^2$ car $\forall a \in \mathbb{R}\ \ |\sin a| \le |a|$,

donc $0 \le H(u\,,t) \le \dfrac{1}{2}\,(M+|x|)^2$; de même $\forall\, u > 1 \ \ \forall\, t \in [-M, M]$ on a

$0 \le H(u\,,t) \le 2$; donc H est borné dans $\mathbb{R}_*^+ \times [-M, M]$.

On en déduit

$$\big[\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,f\,\big]\,(x) \;=\; 2\int_0^\infty \Phi\,(u)\;d\,u \;=\; 4\int_0^\infty \Big[\int_{-M}^{M} H(u\,,t)\,f''(t)\;dt\Big]\,\frac{d\,u}{1+\,u^{3/2}}$$

$$=\;4\int_{-M}^{M}\Big[\int_0^\infty H(u\,,t)\;\frac{d\,u}{1+\,u^{3/2}}\Big]\,f''(t)\;dt = 4\int_{-M}^{M}\Big[\int_0^\infty \frac{\sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]}{u^2}\Big]\,f''(t)\;dt\ ;$$

or un résultat classique nous dit que $\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2(a\,u)}{u^2} \;=\; \frac{\pi}{2}\;|a|$;

on a donc $\displaystyle \frac{1}{\pi}\,\big[\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,f\,\big]\,(x) = \int_{-M}^{M}|\,t-x\,|\;f''(t)\;dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|\,t-x\,|\;f''(t)\;dt$

$$= \int_{-\infty}^{x}(x-t)\;f''(t)\;dt \;+\int_{x}^{+\infty}(t-x)\;f''(t)\;dt = \int_{-\infty}^{x} f'(t)\;dt \;-\int_{x}^{+\infty} f'(t)\;dt = 2\,f\,(x)\,.$$

6.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\;\|\,\mathrm{A}f\,\|_2^2 \,+\, \|\,\mathrm{B}f\,\|_2^2 \;=\; 2\,\pi\,\|\,f\,\|_2^2\;}$.

<u>Dém</u> : $\displaystyle \|\,f\,\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f^{\,2}(x)\;d\,x = \int_{-M}^{M} f^{\,2}(x)\;d\,x = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-M}^{M}\big[\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,f\,\big](x)\;f(x)\;d\,x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}\Big[\int_0^\infty \Big\{\int_{-M}^{M}\cos\big[\,u\,(t-x)\big]\;f(t)\;dt\Big\}\;d\,u\,\Big]\;f(x)\;d\,x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-M}^{M}\Big[\int_0^\infty \Big\{\int_{-M}^{M}\sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]\;f''(t)\;dt\Big\}\;\frac{d\,u}{u^2}\,\Big]\;f(x)\;d\,x$$

Posons $\forall\, u > 0 \quad \forall\, x \in [-M, M]$

$$K\,(u,\,x) \;=\; \frac{1+\,u^{3/2}}{u^2}\int_{-M}^{M}\sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]\;f''(t)\;dt\ ;$$

$\forall\, u \in\,]\,0,1] \quad \forall\, x \in [-M, M]$ on a $\displaystyle |K\,(u\,,x)| \le \frac{1}{2}\int_{-M}^{M}(t-x)^2\,|\,f''(t)|\;dt$

$\le 2\;M^2\;\|\,f''\|_1$; de même $\forall\, u > 1 \quad \forall\, x \in [-M, M]$ on a $|K\,(u\,,x)| \le 2\;\|\,f''\|_1$;

donc K est borné dans $\mathbb{R}_*^+ \times [-M, M]$.

On en déduit $\displaystyle \|f\|_2^2 \;=\; \frac{2}{\pi}\int_{-M}^{M}\Big[\int_0^\infty K\,(u,\,x)\;\frac{d\,u}{1+\,u^{3/2}}\,\Big]\;f(x)\;d\,x$

$$=\;\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\Big[\int_{-M}^{M}K\,(u,\,x)\;f(x)\;d\,x\Big]\;\frac{d\,u}{1+\,u^{3/2}}$$

$$=\;\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\Big[\int_{-M}^{M}\Big\{\int_{-M}^{M}\sin^2\big[\,u\,(t-x)/2\big]\;f''(t)\;dt\Big\}\;f(x)\;d\,x\Big]\;\frac{d\,u}{u^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\int_{-M}^{M}\Big\{\int_{-M}^{M}\cos\big[u(t-x)\big]\,f(t)\,dt\Big\}\,f(x)\,dx\Big]\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\int_{-M}^{M}\cos(u\,t)\,f(t)\,dt\int_{-M}^{M}\cos(u\,x)\,f(x)\,dx$$

$$+\int_{-M}^{M}\sin(u\,t)\,f(t)\,dt\int_{-M}^{M}\sin(u\,x)\,f(x)\,dx\Big]\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[(\mathrm{A}f)^2(u)+(\mathrm{B}f)^2(u)\Big]\,du = \frac{1}{2\,\pi}\Big(\|\mathrm{A}f\|_2^2+\|\mathrm{B}f\|_2^2\Big).$$

6.6. Théorème :

Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; soit $f_n \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ avec $f_n \xrightarrow{2} \tilde f$; alors $\mathrm{A}\,f_n$ et $\mathrm{B}\,f_n$ convergent dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ vers une limite indépendante de la suite particulière f_n.

Dém : On applique le théorème précédent.

Notation provisoire : $\forall\,\tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on pose

$$\boxed{\mathrm{A}'\tilde f = {}^2\lim_n\,(\mathrm{A}\,f_n)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{B}'\tilde f = {}^2\lim_n\,(\mathrm{B}\,f_n)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

6.7. Définition : $\forall\,h \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on pose $\|h\|_{u,2} = \|h\| + \|h\|_2$.

6.8. Théorème : $\big(\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\ \|\ \|_{u,2}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

Dém : Il suffit de montrer que $\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\ \|_{u,2}$. Soit $f_n \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ une suite de Cauchy pour $\|\ \|_{u,2}$; comme $\|\ \| \le \|\ \|_{u,2}$ et $\|\ \|_2 \le \|\ \|_{u,2}$, f_n est aussi une suite de Cauchy pour $\|\ \|$ et $\|\ \|_2$; donc $\tilde f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} g \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$ et $f_n \xrightarrow{2} \tilde h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$; on a $\forall\,n\in\mathbb{N}$ $|f_n(k)-g(k)| \le \|f_n-\tilde g\|\,\|k\|_1$ et $\big|f_n(k)-\tilde h(k)\big| \le \big\|f_n-\tilde h\big\|_2\,\|k\|_2$; donc $f_n(k)\to g(k)$ et $f_n(k)\to\tilde h(k)$; on en déduit $g=\tilde h$ et $\|f_n-g\|_{u,2} = \|f_n-g\| + \|f_n-g\|_2 \to 0$, donc $\tilde f_n \xrightarrow{u,2} g$.

6.9. Théorème : $\forall\,\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{A}'\tilde f = \mathrm{A}\tilde f \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B}'\tilde f = \mathrm{B}\tilde f \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Dém :

Soit $\varepsilon>0$; soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\int_{|t|\ge N}\big|\tilde f(t)\big|\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}$ et $\displaystyle\int_{|t|\ge N}\tilde f(t)^2\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}$;

soit $g \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ nulle en dehors de $[-N,N]$ telle que $\displaystyle\int_{-N}^{N}|\tilde f-g|^2\,dt \le \frac{\varepsilon^2}{8\,N}$;

on a donc $\displaystyle\int_{-N}^{N} |\tilde f - g|\, dt \leq \sqrt{2N}\, \frac{\varepsilon}{\sqrt{8N}} = \frac{\varepsilon}{2}$;

on en déduit $\displaystyle\|\tilde f - g\|_1 = \int_{-N}^{N} |\tilde f - g|\, dt + \int_{|t|\geq N} |\tilde f(t)|\, dt \leq \varepsilon$

et $\displaystyle\|\tilde f - g\|_2^2 = \int_{-N}^{N} |\tilde f - g|^2\, dt + \int_{|t|\geq N} \tilde f(t)^2\, dt \leq \frac{\varepsilon^2}{8N} + \frac{\varepsilon^2}{2} \leq \varepsilon^2$;

donc $\|\tilde f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

On peut donc construire une suite $g_n \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ telle que $g_n \xrightarrow{1} \tilde f$ et $g_n \xrightarrow{2} \tilde f$;

on a donc $\mathrm{A}\, g_n \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathrm{A}\tilde f$ et $\mathrm{A}\, g_n \xrightarrow{2} \mathrm{A}'\tilde f$; donc $\mathrm{A}\tilde f = \mathrm{A}'\tilde f$.

Notation définitive : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on peut donc poser $\mathrm{A}\tilde f = \mathrm{A}'\tilde f$ et $\mathrm{B}\tilde f = \mathrm{B}'\tilde f$.

6.10.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\|\mathrm{A}\tilde f\|_2^2 + \|\mathrm{B}\tilde f\|_2^2 = 2\pi\, \|\tilde f\|_2^2}$.

6.11. Corollaire : $\|\mathrm{A}\|_2 = \|\mathrm{B}\|_2 = \sqrt{2\pi}$.

Dém : Si $\tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est paire on a $\mathrm{B}\tilde f = 0$, donc $\|\mathrm{A}\tilde f\|_2^2 = 2\pi\, \|\tilde f\|_2^2$.

6.12. Définition : On pose $\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{A} + \mathrm{B}}$; c'est un endomorphisme de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$;

$\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on appelle $\mathrm{T}\tilde f$ la transformée réelle de Fourier de $\tilde f$.

6.13.* Théorème : 1) $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ $\boxed{\|\mathrm{T}\tilde f\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|\tilde f\|_2}$

2) $\boxed{\mathrm{A}\mathrm{B} = \mathrm{B}\mathrm{A} = 0}$

3) $\boxed{\mathrm{T}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 2\pi\, \mathrm{I}}$.

6.14.* Théorème : A , B , T sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

6.15. Définition : $\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{A} + \mathrm{B}}$ est aussi un morphisme linéaire $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$;

$\mathrm{T}\tilde\mu$ est la transformée réelle de Fourier de $\tilde\mu$.

On a donc $\forall \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ $\boxed{(\mathrm{T}\tilde\mu)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big[\cos(x\,t) + \sin(x\,t)\big]\, \tilde\mu(t)}$.

6.16. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R})$; alors on a

$$\boxed{\tilde{\mu}(\mathrm{A}\,\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}(\mathrm{A}\,\tilde{\mu})} \qquad \boxed{\tilde{\mu}(\mathrm{B}\,\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}(\mathrm{B}\,\tilde{\mu})} \qquad \boxed{\tilde{\mu}(\mathrm{T}\,\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}(\mathrm{T}\,\tilde{\mu})}.$$

<u>Dém</u> : Comme $\mathrm{A}\,\tilde{\mu}, \mathrm{B}\,\tilde{\mu} \ldots \in \mathcal{C}_B^U(\mathrm{I\!R})$, les expressions ci-dessus ont un sens ; les égalités résultent d'une interversion des signes intégraux.

6.17. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R})$ et $f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathrm{I\!R})$; alors on a

$$\boxed{\langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}, \mathrm{A}f \rangle + \langle \mathrm{B}\,\tilde{\mu}, \mathrm{B}f \rangle = 2\,\pi\,\tilde{\mu}(f)} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}, \mathrm{B}f \rangle = \langle \mathrm{B}\,\tilde{\mu}, \mathrm{A}f \rangle = 0}.$$

<u>Dém</u> :

1) $$2\,\pi\,\tilde{\mu}(f) = \tilde{\mu}\left[(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\,f\right] = \tilde{\mu}\left[\mathrm{A}(\mathrm{A}f)\right] + \tilde{\mu}\left[\mathrm{B}(\mathrm{B}f)\right]$$
$$= \langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}, \mathrm{A}f \rangle + \langle \mathrm{B}\,\tilde{\mu}, \mathrm{B}f \rangle.$$

2) $\mathrm{A}\,\tilde{\mu}$ est paire et $\mathrm{B}f$ est impaire, donc $\langle \mathrm{A}\,\tilde{\mu}, \mathrm{B}f \rangle = 0$.

6.18.* <u>Corollaire</u> : $\forall\,\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R})$ on a $\left[\left(\mathrm{A}\,\tilde{\mu} = 0 \text{ et } \mathrm{B}\,\tilde{\mu} = 0\right) \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0\right]$.

6.19.* <u>Théorème</u> : $\forall\,\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R})$ $\forall\,f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathrm{I\!R})$ on a $\boxed{\langle \mathrm{T}\,\tilde{\mu}, \mathrm{T}f \rangle = 2\,\pi\,\tilde{\mu}(f)}$.

6.20.* <u>Corollaire</u> : $\forall\,\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R})$ on a $\left[\mathrm{T}\,\tilde{\mu} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0\right]$.

§ 7. <u>Transformée complexe de Fourier</u>

On est amené à utiliser des espaces de mesures et de fonctions à valeurs complexes ; nous les noterons $\widehat{\mathcal{M}^{\bullet}}(\mathrm{I\!R})$, etc...

7.1. <u>Définition</u> : On pose $\boxed{\mathrm{Z} = \mathrm{A} + i\,\mathrm{B}}$ et $\boxed{\mathrm{Z}^{\#} = \mathrm{A} - i\,\mathrm{B}}$; on a donc

$$\forall\,\tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}^{\bullet}}(\mathrm{I\!R}) \quad \forall\,x \in \mathrm{I\!R} \quad \mathrm{Z}(\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathrm{I\!R}} e^{\,i\,x\,t}\,\tilde{\mu}(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}^{\#}(\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathrm{I\!R}} e^{-i\,x\,t}\,\tilde{\mu}(t)\ ;$$

Z et $\mathrm{Z}^{\#}$ sont naturellement aussi définis en tant qu'opérateurs $\widehat{\mathcal{L}^2}(\mathrm{I\!R}) \to \widehat{\mathcal{L}^2}(\mathrm{I\!R})$.

Z et $\mathrm{Z}^{\#}$ sont les <u>transformées complexes (directe et réciproque) de Fourier</u>.

7.2.* <u>Théorème</u> : Dans $\widehat{\mathcal{L}^2}(\mathrm{I\!R})$ on a $\boxed{\mathrm{Z}\,\mathrm{Z}^{\#} = \mathrm{Z}^{\#}\mathrm{Z} = 2\,\pi\,\mathrm{I}}$.

7.3. Lemme : $\forall z \in \mathbb{C}$ on a $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\,z\,t-\,t^2/2}\,dt \;=\; \sqrt{2\,\pi}\;\, e^{\,z^2/2}}$.

Dém : Posons $\forall z \in \mathbb{C}\quad f(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\,z\,t-\,t^2/2}\,dt$; en vertu du théorème d'holomorphie, f est analytique dans $\mathbb{C}$; par ailleurs $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\,x\,t-\,t^2/2}\,dt \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{\,x^2/2-(t-x)^2/2}\,dt \;=\; e^{\,x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\,(t-x)^2/2}\,dt \;=\; e^{\,x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\,t^2/2}\,dt$$

$= \sqrt{2\,\pi}\;\, e^{\,x^2/2}$; donc $\forall\, z \in \mathbb{C}\quad f(z) = \sqrt{2\,\pi}\;\, e^{\,z^2/2}$.

7.4. Théorème : $\boxed{\mathrm{Z}\,(e^{-X^2/2}) \;=\; \mathrm{A}\,(e^{-X^2/2}) \;=\; \sqrt{2\,\pi}\;\; e^{-X^2/2}}$.

Dém :

$$\mathrm{A}\,(e^{-X^2/2})\,(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \cos\,(x\,t)\; e^{-\,t^2/2}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{\,i\,x\,t-\,t^2/2}\,dt \,+\, \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\,i\,x\,t-\,t^2/2}\,dt$$

$= \sqrt{2\,\pi}\;\; e^{-\,x^2/2}$.

7.5. Définition : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on pose $\boxed{\mathsf{H}_n\,(X) = (-1)^n\; e^{\,X^2/2}\;\partial^{\,n}\big(e^{-X^2}\big)}$.

Les fonctions H_n sont les fonctions de Hermite ; elles sont égales aux polynômes de Hermite multipliés par $e^{-X^2/2}$.

7.6.* Théorème : $\forall\, \ell \in \mathbb{N}\quad \mathsf{H}_{2\,\ell}$ est une fonction paire et $\mathsf{H}_{2\,\ell+1}$ une fonction impaire.

7.7. Théorème : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathsf{H}_{n+1} = X.\,\mathsf{H}_n - (\mathsf{H}_n)'}$.

Dém : $X.\,\mathsf{H}_n - (\mathsf{H}_n)' \;=\; (-1)^n\; X\; e^{\,X^2/2}\;\partial^{\,n}\big(e^{-X^2}\big) \;-\; (-1)^n\; X\; e^{\,X^2/2}\;\partial^{\,n}\big(e^{-X^2}\big)$

$-\,(-1)^n\; e^{\,X^2/2}\;\partial^{\,n+1}\big(e^{-X^2}\big) \;=\; (-1)^{n+1}\; e^{\,X^2/2}\;\partial^{\,n+1}\big(e^{-X^2}\big) \;=\; \mathsf{H}_{n+1}$.

7.8. Théorème : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathsf{Z}\,(\mathsf{H}_n) \;=\; i^{\,n}\,\sqrt{2\,\pi}\;\; \mathsf{H}_n}$.

Dém : Par récurrence sur n.

1) vrai pour $n = 0$

2) supposons vrai pour n

3) démontrons vrai pour $n+1$:

$$\mathsf{Z}\,(\mathsf{H}_{n+1})\,(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}_{n+1}(t)\; e^{\,i\,x\,t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} t\;\mathsf{H}_{n+1}\,(t)\; e^{\,i\,x\,t}\,dt \;-\; \int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}^{'}_{n+1}\,(t)\; e^{\,i\,x\,t}\,dt$$

$$= -i\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}_n(t)\, e^{ixt}\, dt\Big)' + i\, x \int_{\mathbb{R}} \mathsf{H}_n(t)\, e^{ixt}\, dt = -i\,\big[\mathsf{Z}(\mathsf{H}_n)(x)\big]' + i\, x\, \mathsf{Z}(\mathsf{H}_n)(x)$$

$$= i^{n+1}\sqrt{2\pi}\,\big[x\,\mathsf{H}_n(x) - (\mathsf{H}_n)'(x)\big] = i^{n+1}\sqrt{2\pi}\ \mathsf{H}_{n+1}(x)\,.$$

7.9.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{A}(\mathsf{H}_{2\ell}) = (-1)^{\ell}\sqrt{2\pi}\ \mathsf{H}_{2\ell}$

et $\mathrm{B}(\mathsf{H}_{2\ell+1}) = (-1)^{\ell}\sqrt{2\pi}\ \mathsf{H}_{2\ell+1}\,.$

7.10.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathrm{T}(\mathsf{H}_n) = (-1)^{[n/2]}\sqrt{2\pi}\ \mathsf{H}_n}\,.$

§ 8. Inégalité de Jensen dans $\mathbb{R}^n$

<u>Théorème</u> : On se donne un <u>convexe</u> <u>fermé</u> $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^n$ (non vide et non réduit à un point), une probabilité $\tilde{\mu}$ sur A et une fonction $\Phi : \mathsf{A} \to \mathbb{R}$ <u>convexe</u>, <u>continue</u> et <u>sommable</u> pour $\tilde{\mu}$; alors on a

$$\boxed{\Phi\Big[\int_{\mathsf{A}} x\, \tilde{\mu}(x)\Big] \leq \int_{\mathsf{A}} \Phi(x)\, \tilde{\mu}(x)}\,.$$

<u>Dém</u> : Nous faisons la démonstration dans $\mathbb{R}^2$, la généralisation étant évidente. Supposons d'abord A borné. Considérons $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ le quadrillage canonique de longueur $\dfrac{1}{n}$ et soit $\mathcal{S}_n$ la famille de parties de $\mathbb{R}^2$ formée des sommets, des arêtes *ouvertes* et des carrés *ouverts* du quadrillage.

Posons $u = \displaystyle\int_{\mathsf{A}} x\, \tilde{\mu}(x) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \displaystyle\sum_{T \in \mathcal{S}_n} x_T\, \tilde{\mu}(\mathsf{A} \cap T) \in \mathbb{R}^2$

avec $\forall\, T \in \mathcal{S}_n$ $x_T \in T$. On a $\displaystyle\sum_{T \in \mathcal{S}_n} \tilde{\mu}(\mathsf{A} \cap T) = 1$, donc $x_n \in \mathsf{A}$

et $\Phi(x_n) \leq \displaystyle\sum_{T \in \mathcal{S}_n} \Phi(x_T)\, \tilde{\mu}(\mathsf{A} \cap T)$. Comme la fonction $x \mapsto x$ et la fonction Φ

sont continues, les “séries de Riemann” $\displaystyle\sum_{T \in \mathcal{S}_n} x_T\, \tilde{\mu}(\mathsf{A} \cap T)$ et $\displaystyle\sum_{T \in \mathcal{S}_n} \Phi(x_T)\, \tilde{\mu}(\mathsf{A} \cap T)$

convergent respectivement vers $u = \displaystyle\int_{\mathsf{A}} x\, \tilde{\mu}(x)$ et $\displaystyle\int_{\mathsf{A}} \Phi(x)\, \tilde{\mu}(x)$ quand $n \to +\infty$;

on en déduit $u \in \mathsf{A}$ et $\Phi(u) \leq \displaystyle\int_{\mathsf{A}} \Phi(x)\, \tilde{\mu}(x)$.

Supposons A non borné, on considère alors la suite $\mathsf{A}_n = \mathsf{A} \cap \mathrm{D}_n$, où D_n est le disque fermé, centré à l'origine, de rayon n. A_n est un convexe compact et on a $\displaystyle\bigcup_n \mathsf{A}_n = \mathsf{A}$;

on peut alors écrire $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\Phi\Big[\dfrac{1}{\tilde{\mu}(\mathsf{A}_n)} \displaystyle\int_{\mathsf{A}_n} x\, \tilde{\mu}(x)\Big] \leq \dfrac{1}{\tilde{\mu}(\mathsf{A}_n)} \displaystyle\int_{\mathsf{A}_n} \Phi(x)\, \tilde{\mu}(x)$; il suffit ensuite de prendre la limite pour $n \to +\infty$.