INTRODUCTION

“ Une fonction définie presque partout n’est définie nulle part ! ”

Nous nous sommes fixé pour tâche de reprendre *ab ovo* toute la théorie de l’intégrale de Lebesgue afin d’en améliorer autant que possible l’exposition et la compréhension. Nous n’avons pas hésité à modifier profondément les méthodes habituellement mises en oeuvre, car il faudra bien que cesse un jour le scandale d’un enseignement à ce point rébarbatif, qu’il est donné pour ainsi dire à reculons, professeurs comme étudiants étant également persuadés de son caractère foncièrement indigeste. Notre motivation vient d’aileurs principalement de la répugnance que nous a toujours inspiré la “ boîte à outils ” traditionnelle de l’intégrale de Lebesgue, même lorsque nous avons fini, après de longues années de réflexion post-universitaire, par en maîtriser les éléments essentiels.

D’un point de vue purement objectif en effet, quoi de plus *informe* qu’un borélien, de plus *indigent* qu’un ensemble de mesure nulle, de plus *insaisissable* qu’une fonction définie presque partout ? Nous estimons que de telles notions, par trop alambiquées, sont dépourvues de l’élégance et de la simplicité, en un mot de la *nécessité*, que l’on peut attendre des fondements d’une théorie aussi générale que la théorie de l’intégration. C’est pourquoi nous avons cherché à élaborer de nouveaux outils conceptuels, plus pertinents et plus performants, destinés à rendre l’étude de l’intégrale aussi limpide et intelligible que possible.

Pour ce faire, et prenant le contre-pied des théories existantes, nous sommes partis d’une définition *globale* des “ classes de fonctions sommables ”. Effectivement, plutôt que de définir ces classes *de l’intérieur*, à partir de leur *contenu*, n’y aurait-il pas intérêt à les regarder *de l’extérieur* et à les décrire d’un point de vue résolument opératoire ?

Or ces classes, via l’intégration, ont pour propriété naturelle d’agir linéairement sur certains espaces de fonctions ; de fait *les classes de fonctions sommables se comportent exactement comme des mesures*. Cette observation constitue le principe *fondateur* et *moteur* de notre exposé sur la théorie de l’intégration.

(Nous nous limiterons, pour l’essentiel de cette introduction, au cas de l’intégration de Lebesgue sur un <u>intervalle compact</u> de $\mathbb{R}$).

Notre idée de base consiste à considérer qu’une classe de fonctions sommables n’est rien d’autre qu’une *forme linéaire continue sur l’espace des fonctions étagées* (muni de la topologie uniforme). L’intégrale des fonctions de la classe est alors simplement définie comme la valeur que prend la forme linéaire sur la fonction constante $\mathbb{1}$.

Précisons tout de suite, et c’est évidemment capital, que l’inverse n’est pas vrai : toute forme linéaire continue sur l’espace des fonctions étagées ne correspond pas nécessairement à une classe de fonctions sommables.

Il nous faut donc d'abord résoudre un problème de terminologie : il n'existe en effet aucune dénomination spécifique pour les formes linéaires continues sur l'espace des fonctions *étagées* : nous proposons de les appeler des pseudo-mesures.

Bien entendu le concept de pseudo-mesure est fort proche du concept de mesure , c-à-d d'une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions *continues*. Mais la définition des mesures souffre d'une défectivité certaine, puisqu'elle ne permet pas d'obtenir *directement* la mesure d'un *intervalle*, ce qui est quand même assez consternant ! On ne l'obtient que par un processus d'extension relativement lourd, qu'il vaudrait mieux réserver à des fonctions plus compliquées que ne le sont de simples fonctions étagées !

D'autre part approcher des fonctions étagées par des fonctions continues constitue une opération peu naturelle, en rupture épistémologique avec la définition de l'intégrale de Riemann. Il est beaucoup plus logique et productif de considérer que les mesures sont faites a priori pour mesurer des intervalles, objectif rempli naturellement par les pseudo-mesures.

Remarquons aussi que les fonctions étagées sont bien plus " constructibles " que les fonctions continues puisqu'on peut définir n'importe quelle fonction étagée au moyen d'un nombre *fini* de paramètres réels. De plus les fonctions caractéristiques d'intervalles forment une partie *génératrice* explicite et canonique de l'espace vectoriel des fonctions étagées, ce qui simplifie fortement et justifie amplement l'utilisation de cet espace.

D'ailleurs, par densité, les pseudo-mesures se trouvent automatiquement définies sur tout l'espace des fonctions *réglées*. Dès lors, par restriction aux fonctions continues, les pseudo-mesures deviennent ipso facto des mesures ; l'espace des mesures est donc isométrique au *quotient* de l'espace des pseudo-mesures par le sous-espace des pseudo-mesures nulles sur l'espace des fonctions continues.

Mais de manière plus significative encore, l'espace des mesures est isométrique au *sous-espace* des pseudo-mesures vérifiant une certaine propriété d'" *hypercontinuité* " (équivalente à la σ-additivité). Les mesures peuvent donc être définies directement comme des pseudo-mesures et agir ainsi directement sur les fonctions réglées.

D'autre part de nombreux concepts et théorèmes associés aux mesures (ou aux fonctions) se généralisent sans difficulté aux pseudo-mesures. L'espace des pseudo-mesures constitue donc bien l'espace naturel dans lequel traiter tous les problèmes relatifs à l'intégration.

Signalons que tous les espaces de fonctions, mesures et pseudo-mesures que nous définissons appartiennent à un même type d'espace ordonné : les espaces de Riesz , c-à-d les espaces vectoriels possédant un *ordre* et une *valeur absolue* (à valeurs dans l'ensemble des éléments positifs de l'espace et non dans $\mathbb{R}^+$). Nous emprunterons donc une large part de notre formalisme à la théorie générale de ces espaces.

* * * * * * * * * *

Voyons maintenant précisément comment nous définissons l'espace $\mathcal{L}^1$ des classes de fonctions sommables pour la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions étagées sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, muni de la norme <u>uniforme</u>, et $\mathcal{PM}$ le <u>dual normé</u> (ou dual continu) de $\mathcal{E}$. Les éléments de $\mathcal{PM}$ sont appelés les <u>pseudo-mesures</u> sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Si $f \in \mathcal{E}$, on note $\{f\}$ la pseudo-mesure

$$\boxed{\{f\} \;:\; \mathcal{E} \to \mathbb{R} \;:\; g \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx} \,.$$

$\{f\} \in \mathcal{PM}$ s'appelle la <u>pseudo-mesure associée</u> à f.

On note $\| \;\|_\star$ la norme duale dans $\mathcal{PM}$; on a en particulier

$$\forall f \in \mathcal{E} \quad \big\|\{f\}\big\|_\star = \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx\,.$$

Un résultat classique et élémentaire nous dit que $\mathcal{PM}$ est <u>complet</u> pour la norme duale.

On pose $\underline{\mathcal{E}} = \big\{ \{f\} \;\|\; f \in \mathcal{E} \big\} \subset \mathcal{PM}$. Nous **définissons** alors $\mathcal{L}^1$ comme la ***fermeture de*** $\underline{\mathcal{E}}$ ***dans*** $\mathcal{PM}$ pour la norme $\| \;\|_\star$. Les éléments de $\mathcal{L}^1$ sont appelés les <u>fonctionnelles sommables</u> sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Contrairement aux présentations traditionnelles, nous obtenons ainsi directement et quasi-trivialement l'espace $\mathcal{L}^1$, ainsi que ses propriétés fondamentales (en particulier sa complétude et la densité de $\underline{\mathcal{E}}$). On démontre de plus sans difficulté que les fonctionnelles sommables, définies au départ comme des pseudo-mesures, sont en fait des mesures.

Par des procédés analogues nous pouvons de même définir l'espace $\mathcal{L}^2$ des <u>fonctionnelles hilbertiennes</u> et l'espace $\mathcal{B}$ des <u>fonctionnelles bornées</u> ; on a d'ailleurs <u>$\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$</u>.

Sur l'espace $\mathcal{L}^1$ nous pouvons définir, en plus de la convergence en norme, quatre autres modes de convergence pour les suites : les convergences ***en mesure***, ***presque partout***, ***plate*** et ***exacte***. La convergence exacte est la plus fine d'entre elles. Classiquement parlant, une suite de fonctions f_n converge *exactement* vers la fonction f ssi le *support* de $f_n - f$ converge presque partout vers 0. Bien entendu cette définition doit étre adaptée au fait que les éléments de $\mathcal{L}^1$ sont des fonctionnelles et non des fonctions.

Nous construisons alors l'espace $\mathcal{FO}$ des classes de fonctions mesurables, que nous appellerons simplement <u>fonctionnelles</u>, comme le ***complété de*** $\mathcal{L}^1$ pour la convergence ***exacte***. Plus exactement nous définissons cet espace comme le ***complété de*** $\mathcal{B}$, ce qui permet une définition plus naturelle de la multiplication des fonctionnelles.

A défaut d'un procédé plus spécifique ou plus suggestif, cette ***seconde*** complétion est réalisée par la méthode des suites de Cauchy.

Il faut noter que les quatre modes de convergences cités plus haut engendrent le *même* complété pour $\mathcal{L}^1$, à savoir $\mathcal{FO}$; néanmoins c'est l'utilisation de la convergence exacte qui permet d'obtenir le plus directement et le plus tangiblement les propriétés de $\mathcal{FO}$.

Remarquons que nous avons introduit les (classes de) fonctions mesurables *postérieurement* aux (classes de) fonctions sommables, contrairement à la plupart des théories qui construisent les fonctions sommables *à partir* des fonctions mesurables. Or eu égard à la complexité des fonctions mesurables et à l'intérêt prépondérant des fonctions sommables, il semble manifestement plus avantageux de procéder comme nous l'avons fait : définir le plus rapidement, le plus simplement et le plus naturellement possible les fonctions sommables, en réservant la définition des fonctions mesurables pour un stade plus avancé de la théorie.

****

De par leur définition les pseudo-mesures ne s'appliquent qu'à des fonctions réglées et il est en général impossible d'étendre significativement les pseudo-mesures à des fonctions plus compliquées. Par contre les mesures proprement dites admettent une extension à un espace de fonctions extrêmement vaste : l'espace des fonctions universelles. Réaliser cette extension constitue l'objectif traditionnel des exposés modernes sur l'intégration. Nous l'entreprenons à notre tour, bien que son utilité ne soit pas avérée dans le cadre de notre théorie. En effet pour nombre d'applications (sinon pour toutes) on peut se dispenser d'intégrer des fonctions très générales : l'intégration des *fonctionnelles* suffit ! C'est d'ailleurs ce *découplage* entre fonctions et fonctionnelles qui nous permet de simplifier l'exposition de nombreuses questions relatives à l'intégration.

Il nous faut donc étendre l'intégration (par rapport à une mesure quelconque) à une classe plus vaste de fonctions que les fonctions réglées. Cette extension est d'ailleurs intimement liée à la démonstration du théorème de "convergence dominée" de Lebesgue qui, contrairement au théorème de « convergence monotone », ne s'applique qu'à des fonctions, et non à des fonctionnelles. Cette extension est basée sur l'étude approfondie de l'espace des fonctions positives semi-continues supérieurement, dont la propriété de semi-complétude constitue la clé de voûte des raisonnements.

Ici encore il est nécessaire d'opérer au moyen de deux extensions successives. Nous étendons d'abord l'intégrale aux fonctions pseudo-réglées, qui sont les limites simples bornées des fonctions étagées, puis dans un second temps aux fonctions que nous appelons universelles. Ces fonctions ne sont autres, dans la terminologie traditionnelle, que les fonctions universellement mesurables et sommables.

L'espace vectoriel des fonctions universelles, que nous notons $\mathcal{W}$, jouit de la propriété remarquable d'être *complet* pour la *convergence simple bornée*. On en déduit qu'il contient toutes les fonctions bornées "imaginables", et en particulier toutes les fonctions boréliennes bornées.

Un tel espace est bien plus commode à utiliser que l'espace des fonctions boréliennes bornées, car les fonctions universelles sont approximables par des fonctions élémentaires (par des fonctions pseudo-réglées, elles mêmes approximables par des fonctions étagées), alors qu'en général les fonctions boréliennes bornées ne sont approximables par des fonctions élémentaires qu'à travers une induction transfinie.

Ce processus d'extension est *voisin* de celui qui est proposé dans les présentations traditionnelles. Il en diffère néanmoins sur deux points essentiels :

1°) Nous procédons à cette extension alors que nous avons *déjà* défini $\mathcal{L}^1$, et non pas dans l'*objectif* de définir $\mathcal{L}^1$! La complexité relative du processus d'extension ne vient donc pas altérer la description intrinsèquement simple des fonctionnelles sommables. De plus la connaissance préalable de $\mathcal{L}^1$ (et plus généralement de $\mathcal{PM}$) permet d'améliorer considérablement la lisibilité et l'intelligibilité des démonstrations.

2°) Nous ne construisons pas les fonctions mesurables et sommables *pour une mesure donnée*, mais les fonctions mesurables et sommables *simultanément pour toutes les mesures*. Ceci permet de ne faire appel qu'à un seul espace de fonctions au lieu d'avoir à considérer autant d'espaces que de mesures.

Une fois $\mathcal{W}$ construit, nous pouvons définir pour tout $f \in \mathcal{W}$ la fonctionnelle

$$\boxed{\{f\} \;:\; \mathcal{E} \to \mathrm{I\!R} \;:\; g \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx} \,.$$

On démontre alors que l'application $\mathcal{W} \to \mathcal{B} \;:\; f \mapsto \{f\}$ est *surjective*, ce qui équivaut à dire que toute fonctionnelle bornée peut être "représentée" par une fonction universelle bornée. Notre idée de base se ramène donc en fait, pour les fonctionnelles bornées, à identifier la classe de la fonction universelle f avec la fonctionnelle $f\,dx$; c'est d'ailleurs la *canonicité* de la mesure de Lebesgue dx qui autorise une telle identification.

****

L'ensemble des résultats que nous avons exposés jusqu'à présent se généralise de manière naturelle à $\mathrm{I\!R}$, muni de la mesure de Lebesgue ou d'une autre mesure positive. Le passage aux espaces $\mathrm{I\!R}^n$ ne pose pas non plus de problèmes fondamentalement nouveaux, si ce n'est l'incontournable théorème de Fubini. La démonstration consiste à étendre progressivement le théorème à des epaces de fonctions de plus en plus généraux, et repose *in fine* sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Nous complétons cette partie par un certain nombre d'applications classiques (théorème de Titchmarsh, transformée de Fourier, ...).

Dans une partie suivante nous définissons les espaces $\mathcal{FO}(\tilde{\mu}) \supset \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \supset \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}) \supset \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ où $\tilde{\mu}$ est une mesure *normée positive* sur $\mathrm{I\!R}^n$. Leurs éléments sont appelés les $\underline{\tilde{\mu}\text{–fonctionnelles}}$ (respectivement *générales, sommables, hilbertiennes et bornées*).

Les propriétés de ces nouveaux espaces sont analogues à celle des espaces étudiés précédemment, pour lesquels $\tilde{\mu}$ était la mesure de Lebesgue sur un intervalle ou un pavé compacts.

Néanmoins il serait maladroit de vouloir encore identifier la classe *modulo* $\tilde{\mu}$ d'une fonction universelle f avec la mesure $f\,\tilde{\mu}$. Il faut plutôt considérer que la classe de f est représentée par l'expression $\boxed{\dfrac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}}$, c-à-d par le quotient (formel) de deux mesures.

De cette manière on préserve la cohérence de la notation intégrale, puisqu'on peut effectivement écrire $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\,\tilde{\mu} \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}\;\tilde{\mu}}$.

Ces espaces constituent le cadre naturel de la théorie classique des probabilités et permettent par exemple de traiter des problèmes relatifs à la *convergence en loi* ou au *conditionnement.*

Nous développons ensuite l'intégration des fonctions et des mesures *réelles* ou *complexes* sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$, en nous inspirant des mêmes principes que sur les espaces euclidiens, la mesure de Haar prenant le relais de la mesure de Lebesgue. Signalons que sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ il y a *identité de définition* entre fonction continue et fonction réglée, et donc aussi entre mesure et pseudo-mesure. Comme applications nous étudions de manière approfondie les séries de Fourier et la convolution sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$, avec de nombreux exemples explicites.

Dans la dernière partie nous traitons d'abord de l'intégration sur le produit cartésien d'une *suite* d'ensembles finis, configuration dont $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ peut d'ailleurs être considéré comme un cas particulier. Nous passons ensuite à l'étude de l'intégration sur l'espace vectoriel $\overset{\infty}{\mathbb{R}}$ de *toutes les suites réelles*, espace-clé de la théorie moderne des probabilités. Nous montrons que notre formalisme s'étend sans véritable difficulté à ces nouveaux espaces, procurant ainsi des fondements clairs et solides à la théorie des *processus stochastiques.*

En conclusion nous pensons que le *renversement de perspective* opéré à travers notre théorie accroît fortement la *constructibilité* et la *compréhensibilité* des différents chapitres de la “théorie de la mesure”. Il permet de plus d'*unifier* les traitements, traditionnellement séparés, des mesures et des fonctions mesurables/sommables.